10.1 正則関数の積分

(1) $f(z)$ を領域 D において正則な関数 ($z \in \boldsymbol{C}$) とする. D 内の 2 点 P, Q を結び, かつ D 内に含まれる任意の 2 つの曲線 C_1, C_2 に沿って点 P から Q まで積分したとき,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つことを示せ.

(2) 互いに交わらない 2 つの閉曲線 C_1, C_2 を考える (ただし C_1 は C_2 の外側にあるとする). C_1, C_2 で囲まれた領域 D 内で正則かつ C_1, C_2 上で連続な関数 $f(z)$ を考える ($z \in \boldsymbol{C}$). このとき,

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = -\oint_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つこと示せ. ただし積分は領域 D を左に見る向きにとる.

(3) (1) より正則な複素関数 $f(z)$ の積分は経路によらない. これより $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

これより任意の複素数 α, β に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dg(z)}{dz}\,dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz}g(z)\,dz$$

を証明せよ.

10.2　さまざまな周回積分

(1) 以下の周回積分を求めよ.

$$\text{(i)}\quad \oint \frac{1}{z-a}\,dz \quad \text{(ii)}\quad \oint \frac{1}{z^2+a}\,dz \quad \text{(iii)}\quad \oint \frac{z}{z^2+a}\,dz$$

(2) 原点を中心とする半径 r の円周を C とする. C を正の向きに 1 周する周回積分

$$\oint_C e^{iaz}\,dz$$

を求め, これを用いて以下の式を証明せよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\cos(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\sin(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

10.3 導関数の積分公式

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{10.1}$$

が成り立つ.

(1) (10.1) 式を用いて $f(z)$ の一回導関数を求めよ.

(2) (1) の結果を用いて $f(z)$ の n 階導関数が

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \tag{10.2}$$

となることを証明せよ (ヒント: 例えば数学的帰納法を用いる).

(10.2) は**グルサーの公式**と呼ばれる. 形式的には周回積分と微分の順序を交換したような形

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta$$

に表すことができる.

(3) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\, dz = \sin t$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2+1}\, dz = \cos t$

10.4 コーシーの積分定理の応用

コーシーの積分定理を用いて正則関数について重要な性質が得られる.

リュービルの定理

$|z| < \infty$ で $f(z)$ は正則な関数とする. このとき $|f(z)| < M$ を満たす実数 M が存在するならば, $f(z)$ は定数である.

証明 仮定より $|f(z)| < M$ となる M が存在する. コーシーの積分定理から, 任意の点 z_0 に対し

$$f(z_0) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = \frac{z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\, d\zeta$$

がなりたつ. ここで積分路 C として原点中心の半径 R の円をとる. z_0 はその内部とする. よって,

$$\begin{aligned}
|f(z_0) - f(0)| &= \frac{|z_0|}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\, d\zeta\right| \\
&= \frac{|z_0|}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\theta\right| \\
&< \frac{|z_0|M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|\zeta - z_0|}\, d\theta.
\end{aligned}$$

途中で $d\zeta = iRe^{i\theta}\, d\theta$ を用いた.

ここで, $|z_0| < R/2$ となるように R をとると,

$$|\zeta - z_0| \leq |\zeta| - |z_0| = R - z_0 > R/2$$

となる. 以上の 2 つの関係式から,

$$|f(z_0) - f(0)| < \frac{2M|z_0|}{R}$$

となる. $M, |z_0|$ は有限であるから

$$\lim_{R\to\infty} |f(z_0) - f(0)| = 0$$

となる. これは $f(z) = f(0)$ であること, すなわち $f(z)$ は定数であることを示す.

代数学の基本定理

任意の複素定数 $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0$ を係数とする n 次方程式 $(n \leq 1)$

$$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = 0 \quad (\alpha_n =\neq 0)$$

は, 少なくとも 1 つの解を持つ.

証明 これは背理法を用いて証明される. $f(z) = 0$ が解を持たないとする. このときあらゆる z に対し $f(z) \neq 0$ が成り立つ. したがって

$$g(z) \equiv \frac{1}{f(z)}$$

は $|z| < \infty$ で正則かつ有界である. なぜならば $|z| < \infty$ で $f(z)$ は有限 (発散しない) で,

$$\lim_{|z| \to \infty} g(z) = 0$$

だからである. したがってリュービルの定理より $g(z)$ は定数でなければならない. すなわち $f(z)$ は定数である. しかしこの結果は $\alpha_n \neq= 0$ とした仮定に矛盾する.

これより $f(z) = 0$ は少なくとも 1 つの解を持つ.

$f(z) = 0$ の 1 つの解を ξ_1 とすると, 多項式 $f(z)$ は

$$f(z) = (z - \xi_1) f_1(z)$$

と表される. ここで新たに現れた $f_1(z)$ についても代数学の基本定理から少なくとも 1 つの解 ξ_2 を持つので, $f(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) f_3(z)$ と表される. これを繰り返すと $f(z)$ は完全に因数分解することができ,

$$f(z) = \alpha_n \Pi_{i=1}^{n} (z - \xi_i)$$

と書ける. したがって $f(z) = 0$ は n 個の解 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ を持つことがわかる.

$f(z)$ が多重根をもつ場合は

$$f(z) = \alpha_n (z - \xi_1)^{n_1} (z - \xi_2)^{n_2} \cdots (z - \xi_k)^{n_k}$$

と表される. ここで n_i は解の多重度を表し, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ である.

複素関数 $f(z)$ が与えられ, $f(z) = 0$ を満たす点 z を $f(z)$ の**零点**と呼ぶ. とくに $z = \xi$ が $f(z) = 0$ の k 重根であるとき, ξ は $f(z)$ の k **位の零点**と呼ぶ.

10.5 べき級数

以下の形のベキ級数を考える.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{10.3}$$

ここで z は複素変数, $a_n\,(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は複素定数である. $z = re^{i\theta}$ と極表示すると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \exp(in\theta)$$

と書ける. このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

が収束すれば式 (10.3) は絶対収束する. 以下の問いに答えよ.

(1) 次式で R を定義する.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

このとき $|z| < R$ なら式 (10.3) は絶対収束し, $|z| > R$ なら発散することを示せ.

(2) R を以下のように定義する.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

このときも $|z| < R$ なら式 (1) は絶対収束し, $|z| > R$ なら発散することを示せ.

(3) (1), (2) の R は結局同一のものである. R を **収束半径**という. 以下の複素ベキ級数の収束半径を求めよ.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

10.6 特異点

複素関数 $f(z)$ が正則でない点を $f(z)$ の**特異点**という. 点 $z = z_0$ では正則でないがその近傍の全ての点では正則な時, $z = z_0$ は**孤立特異点**と呼ばれる.

孤立特異点のなかで最も重要なタイプは**極** (pole) と呼ばれるものである. $f(z)$ が $z = z_0$ 近傍で以下のように書けるとき. **「$f(z)$ は $z = z_0$ で k 位の極を持つ」**という.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \tag{10.4}$$

ただし $g(z)$ は $z = z_0$ においても正則な関数, k は自然数である. 別の表現では

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \tag{10.5}$$

が一意に定まるとき $f(z)$ は $z = z_0$ で k 位の極を持つ. ここで a は 0 でない有限な複素定数である.

(1) 次の関数の特異点を全て見つけ, それぞれ何位の極か調べよ.

$$\text{(i) } f(z) = \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} \qquad \text{(ii) } f(z) = \tanh z \qquad \text{(iii) } f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

(2) $f(z)$ が $z = z_0$ で 0/0 の形になることがある. このとき $\lim_{z \to z_0} f(z)$ が $z \to z_0$ の近づけ方によらずに一意に定まるとき, このような孤立特異点を**除きうる特異点**と呼ぶ.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

は除きうる特異点を持つことを示せ.

(3) 孤立特異点のうち, 式 (10.5) を満たす自然数 k が存在せず, しかも除きうる特異点でないものを**真正特異点**という.

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

は原点に真性特異点を持つことを示せ.

10.7 無限遠点とリーマン球面

実関数では正の無限大と負の無限大 ($\pm\infty$) を考えた. 複素関数についても同様の概念の導入を試みる.

今 $w = f(z) = 1/z$ という複素関数を考える. $f(z)$ は $z = 0$ に特異点を持つ. z が原点に近付くと w の絶対値は無限に大きくなり, w 平面の原点から次第に遠ざかっていく. 偏角の値は z の原点への近付き方に依存するため, z 平面上の原点を含むその近傍領域は w 平面上の無限に広い領域に対応する.

しかし, $w = 1/z$ によって z 平面上の原点以外の点は w 平面上の点に 1 対 1 対応している. 原点だけが w 平面上の無数の点に対応しているのは美くしくない. そこで w 平面上に $\lim_{x\to 0} 1/z$ に対応する 1 点を考え, これを**無限遠点**と呼ぶことにする. 無限遠点を含む複素平面を**拡張された複素平面**という.

拡張された複素平面の幾何学的表現として**リーマン球面** (図 10.1) がある. これは複素平面を 3 次元空間の平面と考えた場合に, その原点に接する半径 1/2 の球面である. z 平面上の任意の点 z はその点と z 平面から最も遠い球面上の点 N とを結ぶ直線が球面と交わる点 Z に対応させる. この方法によって z 平面上 $|z| < 1$ の点は球面の下半球上の各点に, $|z| = 1$ の円周上の点は赤道に, $|z| > 1$ の点は球面の上半球上の各点に対応する. z 平面から最も遠い球面上の点 N が無限遠点 $z = \infty$ にあたる.

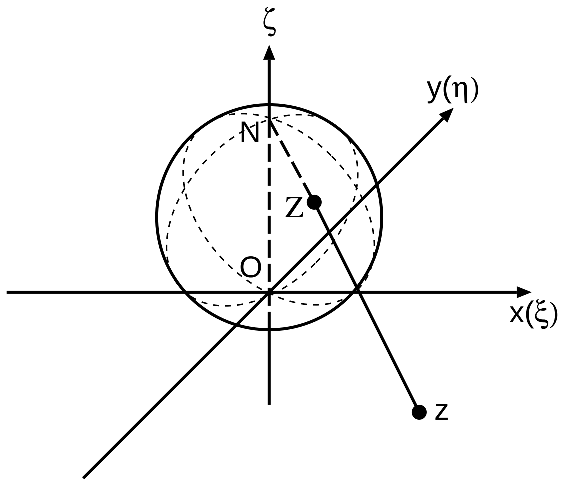

図 10.1: リーマン球面

(1) 原点 O を中心とし, z 平面の実軸と虚軸を ξ, η 軸に, O を通り z 平面に垂直な方向に ζ 軸をとる. (ξ, η, ζ) 座標系におけるリーマン球面を表す方程式を求めよ.

(2) リーマン球面上の無限遠点 N と z 平面上の点 $(x, y, 0)$ を通る直線の方程式を (ξ, η, ζ) を用いて表せ.

(3) リーマン球面上の点 (ξ, η, ζ) と z 平面上の点 z との間に成り立つ関係式を求め, z 平面上の点原点を中心とした任意の半径を持つ円周上の点は, それと平行なリーマン球面上の円に対応することを示せ.

(4) 次の関数は無限遠点において正則か. 正則でない場合, 無限遠点はどのような特異点となっているか (ヒント: $\zeta = 1/z$ とおき, $f(1/\zeta)$ の $\zeta = 0$ における振る舞いを考える).

(i) $f(z) = a + bz^{-2} \quad (a, b$ は複素定数$)$

(ii) $f(z) = z(1 + z^2)$

(iii) $f(z) = e^z$

付録 1: コーシーの積分定理

関数 $f(z)$ が領域 D 上で正則で，単純閉曲線 C がその内部も含めてすべて D に 属するものとする．このとき

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{10.6}$$

である．

解説 複素関数の積分 (複素積分) は複素平面上の線積分として定義される．複素平面上に滑らかな曲線 C があるものとし，C の始点 A を z_0，終点 B を z_n とする．C を $n-1$ 個の点で分割する．分割点は A に近い物から順に $z_1, \cdots, z_{n-1}$ とする．

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

として，分割を十分細かくとった時の $f(\zeta_k)\Delta z_k$ (ζ_k は z_k と z_{k-1} の間の C 上の任意の点) の総和を $f(z)$ の複素積分と定義する．式で書けば

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

これは実積分に帰着させることができる．$f = u(x,y) + iv(x,y)$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\{u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + i[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]\}$$

であるから

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \tag{10.7}$$

とあらわされる．

証明 まず 2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_1(x,y)\boldsymbol{i} - A_2(x,y)\boldsymbol{j}$ についてストークスの定理を書き下す．A_2 にはのちの便宜上 $-$ をつけた．C を xy 面上の閉曲線とするとストークスの定理は

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})_3\,dS$$

である．ここで $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$ に注意すると，

$$\oint_C (A_1dx - A_2dy) = -\int_S \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\,dx\,dy$$

となる．ここで $A_1 = u, A_2 =$ とおいて上式に代入し，コーシー・リーマンの関係式を用いると

$$\int_C (udx - vdy) = 0.$$

同様に $A_1 = v, A_2 = -u$ とおくと

$$\int_C (vdx + udy) = 0$$

となることが分かる．従って閉曲線 C に沿って，C 上およびその内部で正則な関数を積分した場合，積分値は 0 になることが示される．

コーシーの積分定理は，正則な複素関数の積分はその経路によらず始点と終点の値のみよって決まると言うことを意味している．これはベクトル解析の言葉でいえば関数の実部と虚部が渦無しのベクトル場を作っていることにあたる．

付録 2: コーシーの積分公式

関数 $f(z)$ が閉曲線 C の内部およびその上で正則で，C 内部の任意の点を a とするとき

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{10.8}$$

もし a が C の外にあれば

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

である．

解説 この式は複素解析のもっとも重要な成果といってよい．ここから複素関数のテイラー展開，それを拡張したローラン展開が定義される．種々の積分が簡便に解けるようになるのもこの定理の応用である．

証明 準備として，まず次式を証明しておく．

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z-a}dz = 2\pi i \tag{10.9}$$

但し Γ は複素平面上で a を中心とする半径 ρ の円周である．$z-a=\rho e^{i\theta}$ と変数変換し，$dz = i\rho e^{i\theta}d\theta$ に注意すると，

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta}\, d\theta$$

右辺を整理すると

$$\text{右辺} = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

この値が円周の半径によらないことに注意.

コーシーの積分公式の証明に移ろう．$\dfrac{f(z)}{z-a}$ は点 a を除いて正則である．下図のように特異点を避けた積分路を考えることで,

$$\oint_{C+A-B+A'} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

ここで B は a を反時計周りに回る積分路で，$-$ は逆に回ることを示す.

$$\oint_{C+A-B+A'} = \int_C + \int_{-B} + \int_A + \int_A'$$

$$\int_{-B} = -\int_B, \int_A' = -\int_A$$

であるから，結局

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \oint_B \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

ここで $f(z) = f(z) - f(a) + f(a)$ と置くと，

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_B \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz + f(a)\oint_B \frac{1}{z-a}\,dz$$

右辺第 2 項は $2\pi i f(a)$ に等しい．第 1 項は $f(z)$ の正則性から任意の正実数 ε に対して十分小さな ρ をとれば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ とでき，

$$\left|\oint_B \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

$$\oint_B |dz| < 2\pi\varepsilon$$

である．ε は限り無く小さくとれるので，第 1 項の寄与は 0 である．従って，式 (3) を得る．a が C の外側の場合，C 内で $f(z)/(z-a)$ は正則だから定理の後半は明らか.

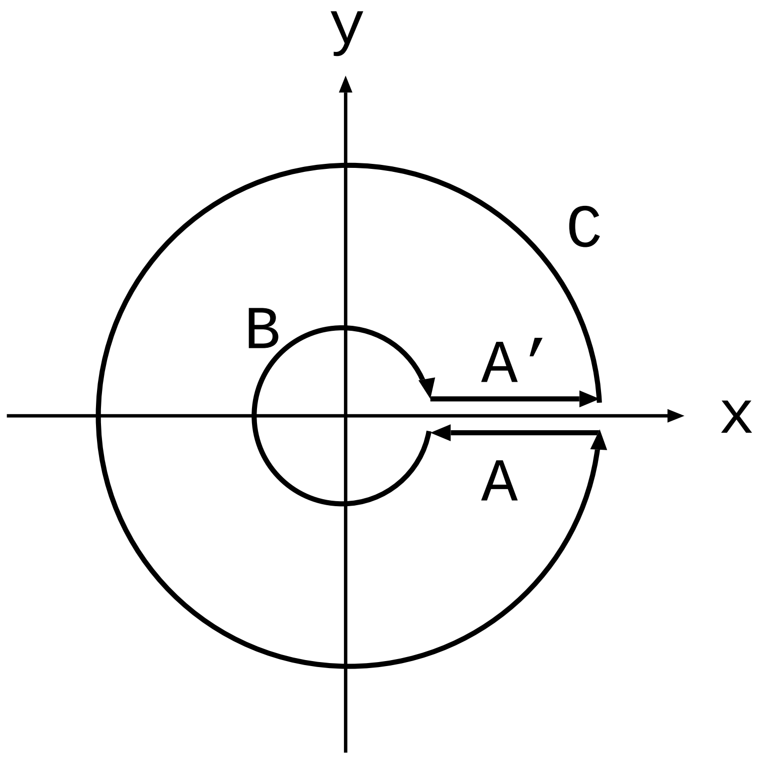

図 10.2: 積分路の取り方. 中心が $z = a$ の点. 便宜上実軸と虚軸の位置をずらしてある.