

11.1 テイラー展開

関数 $f(z)$ が点 z_0 を中心とする半径 ρ の円 C で正則であるとする. このとき C 内部の点 z における $f(z)$ の値は, コーシーの積分公式 (9.1) より,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (11.1)$$

と与えられる. この表現から関数 $f(z)$ を z_0 の回りで展開した数式表現を求める. $f(z)$ が正則な関数である場合, これは実関数におけるテーラー展開の複素関数への拡張表現となる. $f(z)$ が正則でない場合の展開は, 後述のローラン展開である. 正則関数 $f(z)$ の $z = z_0$ を中心とするテーラー展開は以下のように表される.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \quad (11.2)$$

$$A_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

(1) $z = \zeta$ を C 上の点とする. このとき

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left\{ 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \cdots \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

と表されることを確かめよ. さらに右辺の級数が絶対収束することを確認せよ.

(2) (11.1) に (1) の証明の結果を代入することで,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

となることを示せ.

(3) 導関数の積分表示 (グルサーの公式) (9.2) を用いてテイラーの定理が成り立つことを確かめよ.

(4) $f(z)$ が原点において正則である場合の展開表現であるマクローリン展開を求めよ.

11.2 ローラン展開

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に特異点を持つがその近傍の点では正則な場合を考える. このとき $z = a$ の周りでテイラー級数には展開できない. しかしこれを拡張した以下のローラン (Laurant) 級数に展開することができる.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \quad (11.3)$$

$$A_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

テイラー級数との違いはベキが負の項も含む点である. 以下では A_n の形を決定しよう.

- (1) $f(z)$ は円環領域 $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$ において正則とする ($R_{1,2} \in \mathbf{R}$, $0 < R_1 < R_2$). $C_1 = \{z \mid |z - z_0| = R_1\}$, $C_2 = \{z \mid |z - z_0| = R_2\}$ とするとき

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

を示せ.

- (2) 収束性に注意して

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)^n$$

を示せ.

- (3) n の正負に関わらず

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

が成り立つことを示せ. ここで C は C_1 と C_2 との間に任意に描いた同心円である.

式 (11.3) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$ と書いたとき, 負ベキ項からなる右辺の第 1 の級数を主要部, 第 2 の級数を解析部という. A_{-1} は特別な性格を持つことから留数と呼ばれる. $z = z_0$ が $f(z)$ の p 位の極であるとき $n < -p$ の A_n は全て 0 となり主要部は有限項で表わされる. $z = z_0$ が真性特異点のときは主要部は無級数となる.

11.3 関数展開の具体例 (1)

次の関数を括弧内の点を中心としてテイラー展開せよ.

$$(1) \frac{z+2}{(z-2)z} \quad [z=1]$$

$$(2) \frac{1}{z^2} \quad [z=1]$$

$$(3) \cos z \quad [z=\pi/4]$$

$$(4) \sinh z \quad [z=\pi]$$

11.4 留数定理

- (1) $f(z)$ が $z = a$ に p 位の極を持ち, $z = a$ の周りで以下のようにローラン級数に展開されている.

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} A_n(z-a)^n.$$

$f(z)$ を $z = a$ を内部に含む閉曲線 C に沿って積分する. C 上および内部では $f(z)$ は $z = a$ を除き正則とする. このとき

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

を示せ.

係数 A_{-1} を関数 $f(z)$ の留数と呼ぶ. 関数 $f(z)$ の $z = a$ における留数を $\text{Res } f(a)$ と表す.

- (2) C 上および内部で $f(z)$ は n 個の極を除いて正則とする. このとき

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z_k)$$

を示せ.

11.5 留数の求め方

(1) $z = z_0$ が関数 $f(z)$ の p 位の極のとき,

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} (z - z_0)^p f(z)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(z) = P(z)/Q(z)$ で $P(z)$ が正則, $Q(z)$ が $z = z_0$ で一位のゼロ点を持つならば,

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の関数の極における留数を求めよ.

(i) $\frac{z^3 + 5}{z(z-1)^3}$

(ii) $\frac{\cos z}{z^3}$

(iii) $\frac{1}{\sin z}$

(iv) $\frac{z^2 e^z}{1 + e^{2z}}$

11.6 関数展開の具体例 (2)

次のローラン展開の主要部を求めよ.

- (1) 領域 $|z - i| < 2$ で $\frac{1}{z^2 + 1}$ の $z = i$ を中心とする展開.
- (2) 領域 $\left|z - \frac{\pi}{2}\right| < \pi$ で, $\tan z$ の $z = \pi/2$ を中心とする展開.