解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 4 枚.
2. 答案用紙の右上端に氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

(1) $-i$ の平方根を求めよ.

(2) 複素数 $z = x + iy$ の絶対値 $|z|$ は $\sqrt{x^2 + y^2}$ と定義される. このとき任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{(三角不等式)}$$

(3) ド・モアブルの公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つことを示せ.

(4) z を複素数とするとき, $z^3 = 1$ の根を全て求め, それを複素平面上に図示せよ.

(5) z を複素数とするとき, $|z - 3| < 1$ を満たす z の範囲を複素平面上に図示せよ.

問題 2

極限値

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が h の取り方によらず一意に定まる時, $f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能と言う. 領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時, $f(z)$ は D 上で正則であるという. $f(z)$ の実部および虚部を $u(x, y), v(x, y)$ $(z = x + iy, z \in D)$ と表すとき, u, v が連続で, かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

を満たすならば, 関数 $f(z)$ は領域 D 上で正則であることを示せ.

問題 3

z を複素数とするとき以下の周回積分を求めよ. ただし a は実数とし, 積分路は原点を中心とする半径 r の円を反時計周りに 1 周する経路をとり, $a < r$ とする.

(1) $\displaystyle \oint \frac{1}{z-a}\, dz$

(2) $\displaystyle \oint \frac{1}{z^2+a^2}\, dz$

(3) $\displaystyle \oint \frac{z}{z^2+a^2}\, dz$

(4) $\displaystyle \oint e^{iaz}\, dz$

問題 4

複素ベキ級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

の収束半径 R は以下のように定義される.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

これを用いて以下の複素ベキ級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(2) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(3) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$