解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 3 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x, y, z)$, $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla\cdot(\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$

(2) $\nabla \times (\varphi\nabla\varphi) = 0$

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(4) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

問題 2

密度一定の理想流体の運動方程式と連続の式 (質量保存則) は, 以下の方程式で記述される.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} &= \nabla(\frac{p}{\rho}), \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0.\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ は速度ベクトル, p, ρ はそれぞれ圧力と密度である.

(1) 渦無し流の場合 ($\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$) の場合, スカラー関数 $\phi(x, y, z, t)$ を用いて $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ と書ける. このときスカラー関数 ϕ は

$$\nabla^2\phi = 0$$

を満たすことを示せ.

(2) 定常な渦無し流の場合, 運動方程式から

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{一定}$$

が導かれることを示せ. ここで $v = |\boldsymbol{v}|$ である (ヒント: 問題 1 (3) を用いる.)

問題 3

熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱 $\boldsymbol{q}$ (単位: J m^{-2} sec^{-1}) は

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T$$

と表される. ここで k は熱伝導率 (単位: J K^{-1} m^{-1} sec^{-1}) である. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\nabla^2 T.$$

ここで κ は熱拡散率で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c_p (単位: J K^{-1} kg^{-1}) を用いて $\kappa = k/\rho c_p$ と表される.

問題 4

閉曲線 C に沿って発生する電場を $\boldsymbol{E}$ とすると, ファラデーの電磁誘導は

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

と表される. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. Φ は 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を用いて $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ と表されることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

を求めよ.