## 3.1 スカラーの勾配

座標 $x, y, z$ の関数 $f = f(x, y, z)$ が与えられた場合, 点 $(x, y, z)$ における $f$ の**勾配** (gradient) は以下のように定義される.

$$\text{grad } f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{3.1}$$

ここで $\boldsymbol{e}_i$ は $i$ 方向の単位ベクトルである. grad はグラジュエント, もしくはグラッドと発音する. (3.1) はハミルトンの演算子

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\text{grad } f = \nabla f$$

と表される.

(1) 固定点 P から一定の微小距離 $dr$ だけ離れた点 Q がある. 点 P から Q へ移動した際の関数 $f$ の変化が最大となるのは, ベクトル PQ が点 P における $\nabla f$ に平行な場合であることを示せ (ヒント: ベクトル PQ を $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$ としてみよ).

(2) $\nabla f$ は $f =$ 一定 の面 (これを等位面と呼ぶ) に垂直であることを示せ.

(3) $g$ を $f$ とは異なるスカラー関数とする場合, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし $\alpha, \beta$ はスカラーとする.

(i) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g$

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(iii) $\nabla\left(\dfrac{g}{f}\right) = \dfrac{f\nabla g - g\nabla f}{f^2}$

(iv) $\nabla f(g) = \dfrac{\partial f}{\partial g}\nabla g$

## 3.2 スカラー勾配の具体例・スカラーポテンシャル

(1) 以下の 2 次元直交直線座標系 $(x, y)$ におけるスカラー関数 $f = f(x, y)$ について, grad $f$ を求めよ. ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする.

$$\text{(i)} \quad f = \frac{1}{r} \quad \text{(ii)} \quad f = xy \quad \text{(iii)} \quad f = 4x^2 + 9y^2$$

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ について, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

$$\text{(i)} \quad \nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \text{(ii)} \quad \nabla f(r) = f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \text{(iii)} \quad \nabla(\frac{1}{r}) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \quad \text{(iv)} \quad \nabla \ln r = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$

(3) 原点に置かれた電荷 $q$ による電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

と与えられる. このとき $\boldsymbol{E}$ のスカラーポテンシャル $\varphi$ を求めよ (ヒント: (2) の結果を利用する).

## 3.3 ベクトルの発散

各成分が座標の関数となっているベクトル

$$\boldsymbol{A} = a_x(x, y, z)\boldsymbol{e}_x + a_y(x, y, z)\boldsymbol{e}_y + a_z(x, y, z)\boldsymbol{e}_z = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

を考える (このとき $\boldsymbol{A}$ をベクトル場と呼ぶ). $\boldsymbol{A}$ の**発散** (divergence, ダイバージェンス) は以下のように定義される.

$$\text{div } \boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{3.2}$$

(1) $\varphi = \varphi(x, y, z)$ をスカラー関数とすると,

$$\text{div} \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = (\text{grad } \varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi \text{div} \cdot \boldsymbol{A}$$

となることを示せ.

(2) スカラー関数 $\varphi$ に対し,

$$\text{div } (\text{grad } \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

となることを示せ.

div (grad $\varphi$) は $\nabla \cdot (\nabla \varphi), \nabla^2 \varphi$ 等とも表す. とくに $\nabla^2$ を記号 $\Delta$ で表し, これをラプラス演算子と呼ぶ.

## 3.4 ベクトルの回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し, その**回転** (rotation, ローテーション, ロート) は以下のように定義される.

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{3.3}$$

行列式の形で書けば,

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

と表される.

(1) rot$\boldsymbol{A}$ の第 $i$ 成分をエディントンのイプシロン $\varepsilon_{ijk}$ を用いて表せ.

(2) スカラー関数 $\varphi$ に対し rot (grad $\varphi$) $= 0$ を証明せよ.

(3) div (rot $\boldsymbol{A}$) $= 0$ を証明せよ.

(4) rot $(\varphi\boldsymbol{A}) =$ (grad $\varphi$) $\times\ \boldsymbol{A} + \varphi$rot $\boldsymbol{A}$ を証明せよ.

## 3.5 発散・回転の物理的解釈

(1) 3 次元空間内の**定常な流れ**を考える. このとき空間内の各点の速度場は $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ で与えられる. 流れ場中に空間内のある一点 P$(x, y, z)$ を頂点にもち, 角辺が $x, y, z$ 軸に平行でその長さが $(dx, dy, dz)$ である微小直方体を置く. この直方体から単位時間に流出する流体の総体積は, 近似的に

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})_{\mathrm{P}} \times dxdydz$$

と表されることを示せ. ここで $(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})_{\mathrm{P}}$ は点 P における $\boldsymbol{v}$ の発散を表す.

(2) 原点を通る固定軸の周りに一定の角速度 $\Omega$ で剛体が回転しているとする. 剛体の任意の点における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする. $\boldsymbol{r}$ における速度を $\boldsymbol{v}$ とするとき,

(i) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ となることを示せ.

(ii) rot $\boldsymbol{v}$ を計算せよ.

ただし $\boldsymbol{\Omega}$ は大きさが $\Omega$ の角速度ベクトルである.

## 3.6 $\nabla$ を含む演算

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x,y,z)$, $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla\times(\varphi\nabla\varphi)=0$

(2) $\nabla\cdot(\nabla\varphi\times\nabla\psi)=0$

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

(4) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}-(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}$

(5) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$