6.1 湧点とポアソンの方程式

ベクトル場において発散が 0 でない場所を**涌点**という. 涌点のまわりを囲む閉曲面を S とし, S に囲まれた領域を V とするとき,

$$\int_v \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV \tag{6.1}$$

を S 内の涌点の強さという. ガウスの定理から,

$$\int_v \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

である. したがって, 涌点の強さとは曲面 S から外に出る $\boldsymbol{A}$ の流線[1] の数である.

(1) 電荷 q と q を囲む閉局面上における電場 E との間には, ガウスの定理より

$$q = \int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

が成り立つ. 電荷密度を ρ とするとき,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho$$

となることを示せ.

(2) $\boldsymbol{E}$ のスカラーポテンシャルを φ とするとき,

$$\nabla^2\varphi = -\rho \tag{6.2}$$

となることを示せ.

(6.2) は**ポアソンの方程式**とよばれる.

[1] その接線ベクトルが各点での $\boldsymbol{A}$ の方向を持つ曲線を流線という. $\boldsymbol{A}$ の強さをは流線を疎または密に書くことで表し, $\boldsymbol{A}$ と直角な単位面積あたりを通過する流線の数を $\boldsymbol{A}$ に比例するようにとる. 以下では流線の数は $\boldsymbol{A}$ の大きさに等しいとする.

6.2 渦

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ において回転が 0 でない場合, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ には**渦**があるという. このとき $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の流線を**渦線**という. $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の発散は 0 なので渦線の両端は無限遠にまで達しているか, 閉じているか, または境界に達しているかのいずれかである.

渦のあるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の存在する領域中に閉曲線 C を考え, C に囲まれた曲面 S 上での面積分

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{6.3}$$

を曲線 C に囲まれた渦の強さという. ストークスの定理によれば

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\,d\boldsymbol{r}$$

である.

(1) 渦線を側面境界に持つような管を**渦管**という. 渦管ではどのような横断面をとっても, そこにおける渦の強さは等しいことを示せ.

6.3 スカラーポテンシャル

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ がスカラーポテンシャル φ を持つとき,

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = -\nabla\times(\nabla\varphi) = 0$$

なので $\boldsymbol{A}$ には渦がない. このようなベクトルを渦無しのベクトル, または**ラメラー状ベクトル**という.

ここでは以下の手順にしたがって, $\nabla\times\boldsymbol{A} = 0$ のときにはスカラーポテンシャル φ が存在することを示す.

(1) 点 P, Q を通る曲線 PQ に沿った線積分

$$\int_{\mathrm{PQ}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$$

は, 曲線のとり方によらず点 P の位置だけによることを示せ.

(2) 上記の積分の値を $-\varphi$ とするとき,

$$\boldsymbol{A} = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

となることを示せ.

これよりベクトル場がスカラーポテンシャルを持つ必要十分条件は, ベクトル場に渦がないことであることがわかる.

6.4 グリーンの公式

(1) 閉曲面 S とそれによって囲まれた領域 V が与えられているとする. スカラー関数 φ, ψ に対し, 以下の公式 (グリーンの定理) が成り立つことを示せ.

$$\oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS = \int_V (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi)\, dV \tag{6.4}$$

$$\oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) dS = \int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi)\, dV \tag{6.5}$$

ここで $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}, \dfrac{\partial \psi}{\partial n}$ は曲面 S の法線方向微分であり, 法線は閉曲面の内側から外側の方向を正にとる.

(2) 領域 V 内の点 O から P までの距離を r とする. このとき (6.5) において $\psi = 1/r$ とした

$$\oint_S \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS = 4\pi\varphi_0 + \int_V \frac{1}{r}\nabla^2\varphi\, dV \tag{6.6}$$

が成り立つことを示せ. ここで φ_0 は V 内の点 O における φ の値である (ヒント: 点 O では $1/r$ は発散してしまうため, V から O を中心とした半径 ε の球を除いた領域 V' について (6.5) を用い, その後 $\varepsilon \to 0$ の極限を考える).

(6.6) において $\nabla^2\varphi = -\rho$ とすると,

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho}{r}\, dV + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS$$

となる. これより涌点の密度分布 ρ と曲面上における $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ が与えられれば, V 内のポテンシャル φ の値は確定することがわかる.

6.5 ベクトルポテンシャル

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が別のベクトル場 $\boldsymbol{p}$ の回転に等しいとき, すなわち

$$\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{p}$$

のとき, $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{A}$ の**ベクトルポテンシャル**という. このようなベクトルを回転的ベクトル, または**ソレノイド状ベクトル**という. このとき

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{q}) = 0$$

より $\boldsymbol{A}$ は非発散である.

(1) $\boldsymbol{A}$ が非発散である場合に, $\boldsymbol{A}$ の各成分を用いてベクトルポテンシャル $\boldsymbol{p}$ の各成分を表せ. 簡単のため, $\boldsymbol{p}$ の z 成分は 0 とせよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{p}$ が $\nabla\cdot\boldsymbol{p} = 0$ であるとする. このとき

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}$$

とおくと

$$\nabla^2\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{c}$$

となることを示せ.

上記のような $\boldsymbol{c}$ を導入すると, あとは (6.6) を用いてベクトルポテンシャル $\boldsymbol{p}$ を求めることができる.