7.1 波動方程式

マックスウェルの電磁方程式は以下の 4 本の式からなる.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho, \tag{7.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{7.2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{7.3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{7.4}$$

ここで $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ は電場と磁場, $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ は電束密度とと磁束密度, ρ は電荷密度, $\boldsymbol{I}$ は電流密度である. $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{I}$ の間には以下の関係が成り立つ.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{B}, \tag{7.5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \tag{7.6}$$

$$\boldsymbol{I} = \sigma\boldsymbol{E}. \tag{7.7}$$

ここで ε, μ, σ はそれぞれ誘電率と透磁率, 電気伝導率である.

(1) $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ の満たす方程式を求めよ.

(2) (1) において, 真空中の場合 ($\rho = 0$, $\sigma = 0$) の場合の方程式を求めよ.

7.2 非圧縮性流体の運動

密度一定の理想流体の運動方程式と連続の式 (質量保存則) は, 以下の方程式で記述される.

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla(\frac{p}{\rho}), \tag{7.8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{7.9}$$

ここで $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ は速度ベクトル, p, ρ はそれぞれ圧力と密度である.

(1) (7.8) の両辺の回転をとることで渦度方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla \times [\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})]$$

をもとめよ. ここで渦度とは $\nabla \times \boldsymbol{v}$ のことである.

(2) 渦無し流の場合 ($\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$) の場合, スカラー関数 $\phi(x, y, z, t)$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$$

と書けることを確かめよ (ϕ は速度ポテンシャルと呼ばれる).

(2) 渦無し流の場合, 上記のスカラー関数 ϕ は

$$\nabla^2\phi = 0$$

を満たすことを示せ (この式はラプラス方程式と呼ばれる).

(3) 定常な渦無し流の場合, 運動方程式から

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{一定}$$

が導かれることを示せ (ベルヌーイの方程式). ここで $v = |\boldsymbol{v}|$ である.