9.1 複素関数の極限と連続性

領域 D で定義された複素関数 $w = f(z)$ を考える. z が D 内を移動してある点 z_0 に近付くとき, w が w 平面内の点 w_0 に近付く場合, $f(z)$ は $z = z_0$ で**極限値** w_0 **を持つ**という. 数式では

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{9.1}$$

と表す. このとき z_0 **にどの方向から近付いても** w **は** w_0 **に近付く** (すなわち偏角によらない) ことが必要である.

複素関数 $w = f(z)$ が次の 3 つの条件 [1] $z = z_0$ で $f(z_0)$ が存在する, [2] $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ が存在する, [3] $w_0 = f(z_0)$ が成り立つ, を同時に満たすとき, $f(z)$ は $z = z_0$ で**連続**であるという

(1) 次の関数の極限値を求めよ.

$$\text{(i)} \quad z^2 - z + 2i \quad (z \to 1 + i) \quad \text{(ii)} \quad \frac{1 + z^2}{1 + iz} \quad (z \to i) \quad \text{(ii)} \quad \frac{z}{\overline{z}} \quad (z \to 0)$$

(2) 次の関数の $z = 0$ における連続性を調べよ.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \begin{cases} (z + \overline{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases} \quad \text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} (z + \overline{z})^2/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$$

9.2 複素関数の微分

h を偏角一定の複素数とする. このとき極限値

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{9.2}$$

が h の取り方によらず一意に定まる時, $f(z)$ は $z=z_0$ で**微分可能**と言う. その極限値を $f(z)$ の $z=z_0$ における微分係数と言い, $f'(z_0)$ や $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ 等と記す. 領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時, $f(z)$ は D 上で**正則**であるという.

(1) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x$ として式 (9.2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(2) $f(z)=z^2$ とする. $h=i\Delta y$ として式 (9.2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(3) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x+i\Delta y$, $\Delta y=k\Delta x$ として, 式 (9.2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(4) $f(z)=z^n$ の場合, 式 (9.2) の極限は h の偏角の値によらず nz^{n-1} に収束することを示せ.

9.3 コーシー・リーマンの定理

領域 D で定義された複素関数 $f(z)$ の実部および虚部を $u(x,y), v(x,y)$ とする ($z = x + iy, z \in D$). u, v が連続で，かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.3}$$

を満たすならば，関数 $f(z)$ は領域 D 上で正則である.

解説 極限値

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が h の取り方によらず一意に定まる時，$f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能と言う．その極限値を $f(z)$ の $z = z_0$ における微分係数と言い，$f'(z_0)$ や $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ 等と記す．領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時，$f(z)$ は D 上で正則であるという．式 (9.3) はコーシー・リーマンの関係式と呼ばれ，複素関数の微分法の基礎となる式である.

証明 必要条件は次の方針で証明できる．$h = \Delta x, h = i\Delta y$ ($\Delta x, \Delta y \in \boldsymbol{R}$) とおき，それぞれ $\Delta x, \Delta y \to 0$ の極限をとって，$f'(z)$ を 2 通りにあらわす．2 通りの表式の実部と虚部が等しくなければならないと言うことから式 (1) が得られる (実際に確かめてみよ)．十分条件は以下のように示される.

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Delta u + i\Delta v \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + O(|h|) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + O(|h|)
\end{aligned}$$

最後の変型に式 (9.3) を用いた．ここから

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}$$

と導関数が一意に定まる.

9.4 正則性 (1)

(1) コーシー・リーマンの定理の必要条件を証明せよ.

(2) コーシー・リーマンの微分方程式 (9.3) を変形すると, $u(x,y), v(x,y)$ の満たす式として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

が得られることを確かめよ.

ラプラス方程式の解は調和関数と呼ばれる. コーシー・リーマンの微分方程式 (9.3) の関係を満たすような調和関数の組を, **違いに共役な調和関数**という.

(3) $u(x,y)=e^x\sin y$ は調和関数であることを確かめよ.

(4) 上記の u に共役な調和関数 $v(x,y)$ を求めよ.

(5) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z=x+iy$ とした場合の $f(z)$ を求めよ.

9.5 正則性 (2)

$z = x + iy$, $x, y \in \boldsymbol{R}$ とする. 次の関数 $f(z)$ はコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

(1) $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$

(2) $f(z) = e^{-y}\,(\cos x + i\,\sin x)$

(3) $f(z) = z - \bar{z}$

(4) $f(z) = z + 1/z$