11.1 べき級数

以下の形のベキ級数を考える.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{11.1}$$

ここで z は複素変数, $a_n\,(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は複素定数である. $z = re^{i\theta}$ と極表示すると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \exp(in\theta)$$

と書ける. このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

が収束すれば式 (11.1) は絶対収束する. 以下の問いに答えよ.

(1) 次式で R を定義する.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

このとき $|z| < R$ なら式 (11.1) は絶対収束し, $|z| > R$ なら発散することを示せ.

(2) R を以下のように定義する.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

このときも $|z| < R$ なら式 (1) は絶対収束し, $|z| > R$ なら発散することを示せ.

(3) (1), (2) の R は結局同一のものである. R を **収束半径**という. 以下の複素ベキ級数の収束半径を求めよ.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

11.2 特異点

複素関数 $f(z)$ が正則でない点を $f(z)$ の**特異点**という．点 $z = z_0$ では正則でないがその近傍の全ての点では正則な時，$z = z_0$ は**孤立特異点**と呼ばれる．

孤立特異点のなかで最も重要なタイプは**極** (pole) と呼ばれるものである．$f(z)$ が $z = z_0$ 近傍で以下のように書けるとき．**「$f(z)$ は $z = z_0$ で k 位の極を持つ」**という．

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \tag{11.2}$$

ただし $g(z)$ は $z = z_0$ においても正則な関数, k は自然数である．別の表現では

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \tag{11.3}$$

が一意に定まるとき $f(z)$ は $z = z_0$ で k 位の極を持つ．ここで a は 0 でない有限な複素定数である．

(1) 次の関数の特異点を全て見つけ, それぞれ何位の極か調べよ．

$$\text{(i)}\ f(z) = \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} \qquad \text{(ii)}\ f(z) = \tanh z \qquad \text{(iii)}\ f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

(2) $f(z)$ が $z = z_0$ で $0/0$ の形になることがある．このとき $\lim_{z \to z_0} f(z)$ が $z \to z_0$ の近づけ方によらずに一意に定まるとき, このような孤立特異点を**除きうる特異点**と呼ぶ．

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

は除きうる特異点を持つことを示せ．

(3) 孤立特異点のうち，式 (11.3) を満たす自然数 k が存在せず, しかも除きうる特異点でないものを**真正特異点**という．

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

は原点に真性特異点を持つことを示せ．

11.3 無限遠点とリーマン球面

実関数では正の無限大と負の無限大 ($\pm\infty$) を考えた. 複素関数についても同様の概念の導入を試みる.

今 $w = f(z) = 1/z$ という複素関数を考える. $f(z)$ は $z = 0$ に特異点を持つ. z が原点に近付くと w の絶対値は無限に大きくなり, w 平面の原点から次第に遠ざかっていく. 偏角の値は z の原点への近付き方に依存するため, z 平面上の原点を含むその近傍領域は w 平面上の無限に広い領域に対応する.

しかし, $w = 1/z$ によって z 平面上の原点以外の点は w 平面上の点に 1 対 1 対応している. 原点だけが w 平面上の無数の点に対応しているのは美くしくない. そこで w 平面上に $\lim_{x\to 0} 1/z$ に対応する 1 点を考え, これを**無限遠点**と呼ぶことにする. 無限遠点を含む複素平面を**拡張された複素平面**という.

拡張された複素平面の幾何学的表現として**リーマン球面** (図 11.1) がある. これは複素平面を 3 次元空間の平面と考えた場合に, その原点に接する半径 1/2 の球面である. z 平面上の任意の点 z はその点と z 平面から最も遠い球面上の点 N とを結ぶ直線が球面と交わる点 Z に対応させる. この方法によって z 平面上 $|z| < 1$ の点は球面の下半球上の各点に, $|z| = 1$ の円周上の点は赤道に, $|z| > 1$ の点は球面の上半球上の各点に対応する. z 平面から最も遠い球面上の点 N が無限遠点 $z = \infty$ にあたる.

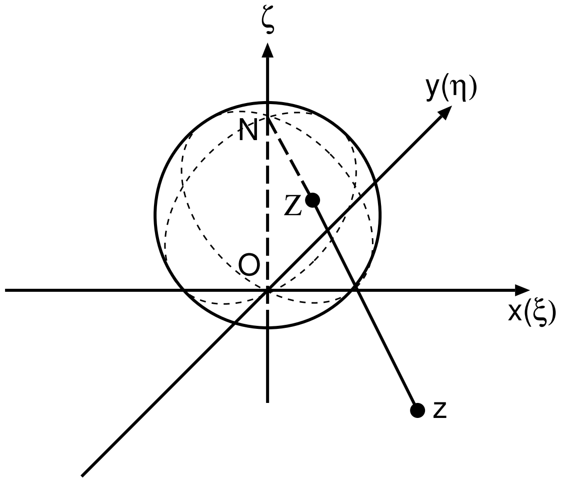

図 11.1: リーマン球面

(1) 原点 O を中心とし, z 平面の実軸と虚軸を ξ, η 軸に, O を通り z 平面に垂直な方向に ζ 軸をとる. (ξ, η, ζ) 座標系におけるリーマン球面を表す方程式を求めよ.

(2) リーマン球面上の無限遠点 N と z 平面上の点 $(x, y, 0)$ を通る直線の方程式を (ξ, η, ζ) を用いて表せ.

(3) リーマン球面上の点 (ξ, η, ζ) と z 平面上の点 z との間に成り立つ関係式を求め, z 平面上の点原点を中心とした任意の半径を持つ円周上の点は, それと平行なリーマン球面上の円に対応することを示せ.

11.4 テイラー展開

関数 $f(z)$ が点 z_0 を中心とする半径 ρ の円 C で正則であるとする．このとき C 内部の点 z における $f(z)$ の値は, コーシーの積分公式 (9.1) より,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{11.4}$$

と与えられる．この表現から関数 $f(z)$ を z_0 の回りで展開した数式表現を求める．$f(z)$ が正則な関数である場合, これは実関数における**テーラー展開**の複素関数への拡張表現となる．$f(z)$ が正則でない場合の展開は, 後述の**ローラン展開**である．正則関数 $f(z)$ の $z = z_0$ を中心とするテーラー展開は以下のように表される．

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \\ A_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{aligned} \tag{11.5}$$

(1) $z = \zeta$ を C 上の点とする．このとき

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left\{1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

と表されることを確かめよ．さらに右辺の級数が絶対収束することを確かめよ．

(2) (11.4) に (1) の証明の結果を代入することで,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

となることを示せ．

(3) 導関数の積分表示 (グルサーの公式) (10.4) を用いてテイラーの定理が成り立つことを確かめよ．

(4) $f(z)$ が原点において正則である場合の展開表現であるマクローリン展開を求めよ．

11.5 ローラン展開

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に特異点を持つがその近傍の点では正則な場合を考える．このとき $z = a$ の周りでテイラー級数には展開できない．しかしこれを拡張した以下の **ローラン (Laurant) 級数**に展開することができる．

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \tag{11.6}$$
$$A_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

テイラー級数との違いはベキが負の項も含む点である．以下では A_n の形を決定しよう．

(1) $f(z)$ は 円環領域 $R_1 \le |z - z_0| \le R_2$ において正則とする ($R_{1,2} \in \boldsymbol{R}$, $0 < R_1 < R_2$). $C_1 = \{z \,|\, |z - z_0| = R_1\}, C_2 = \{z \,|\, |z - z_0| = R_2\}$ とするとき

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

を示せ.

(2) 収束性に注意して

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n$$

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right)^n$$

を示せ.

(3) n の正負に関わらず

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

が成り立つことを示せ．ここで C は C_1 と C_2 との間に任意に描いた同心円である.

式 (11.6) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$ と書いたとき, 負ベキ項からなる右辺の第 1 の級数を**主要部**, 第 2 の級数を**解析部**という．A_{-1} は特別な性格を持つことから**留数**と呼ばれる．$z = z_0$ が $f(z)$ の p 位の極であるとき $n < -p$ の A_n は全て 0 となり主要部は有限項で表わされる．$z = z_0$ が真性特異点のときは主要部は無限級数となる.

11.6 関数展開の具体例 (1)

次の関数を括弧内の点を中心としてテイラー展開せよ.

(1) $\dfrac{z+2}{(z-2)z} \quad [z=1]$

(2) $\dfrac{1}{z^2} \quad [z=1]$

(3) $\cos z \quad [z=\pi/4]$

(4) $\sinh z \quad [z=\pi]$

11.7 関数展開の具体例 (2)

次のローラン展開の主要部を求めよ.

(1) 領域 $|z-i|<2$ で $\dfrac{1}{z^2+1}$ の $z=i$ を中心とする展開.

(2) 領域 $\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<\pi$ で, $\tan z$ の $z=\pi/2$ を中心とする展開.

付録: 級数の収束に関する補足

問題 10.5 では複素巾級数の収束半径について議論する. ここでは収束半径の導出に必要な諸定理について若干復習する.

まず級数の収束に関する言葉の整理を行う.

級数の収束 無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{11.7}$$

が与えられた場合, 任意の正数 ε に対しある自然数 N をとると $n \geq N$ を満たす全ての n について

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| < \varepsilon \tag{11.8}$$

となる場合, この無限級数 α に**収束する**と言う. このような収束の定義は級数だけでなく数学の広い範囲において用いられる.

絶対収束 級数 (11.7) が与えられた場合, その各項の絶対値の和からなる級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \tag{11.9}$$

が収束する場合, 級数 (11.7) は**絶対収束する**という.

一様収束 これは関数から構成される数列 (関数列) $\{f_n(x)\}$ についての収束の概念を表している. 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束するとは, (11.8) と同様に任意の正数 ε に対しある自然数 N をとると $n \geq N$ を満たす全ての n について

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{11.10}$$

が成り立つことを指す. さらに ε, N の取り方が x に依存せず (11.10) が成り立つ場合, 関数列 $f_n(x)$ は $f(x)$ に**一様収束する**という.

一様収束の概念は関数列の級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)$ に対しても用いられる.

定理 1: コーシーの判定条件

数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は, 任意の正数 ε に対してある自然数 N をとると,

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad (n, m \geq N) \tag{11.11}$$

が成り立つことである.

解説 数列, 級数の収束を議論するために必要な最も基本的な定理である. このような条件を満たす数列を**基本列**または**コーシー列**と呼ぶ.

この定理の結果を用いると級数に対するコーシーの判定条件を導くことができる. すなわち無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は, $\{a_n\}$ の n, m 項部分和をそれぞれ S_n, S_m とすると, 任意の正数 ε に対してある自然数 N をとると,

$$|S_m - S_n| < \varepsilon \quad (m > n > N) \tag{11.12}$$

が成り立つことである.

証明 まずは必要性の証明を行う. $\{a_n\}$ が α に収束するとする. このときある自然数 N をとると $n \geq N$ な n に対し $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ となる. よって $n, m \geq N$ に対して

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) + (\alpha - a_n)| \leq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つ.

次に十分性の証明. (11.11) が成り立つとする. ここで $\varepsilon = 1$ とおくと,

$$|a_m - a_n| < 1 \quad (n, m \geq N).$$

これは以下のように書き換えても差し支えない.

$$|a_N - a_n| < 1 \quad (n \geq N).$$

これより $\{a_n\}$ の部分数列 $\{a_n | n \geq N\}$ は有界 (ある上限値が存在する) である. **ボルツァノ・ワイエルストラスの定理**から有界な数列は収束するので, その収束値を α とする.

ここで一度 (11.11) に戻る. $N = N_1$ として

$$|a_m - a_n| < \varepsilon/2 \quad (n, m \geq N_1)$$

が成り立つ. 部分数列 $\{a_n | n \geq N\}$ に含まれる a_k を取り出すと

$$|a_k - \alpha| < \varepsilon/2 \quad (k \geq N_1)$$

も成り立つ. 上記の 2 つの式から全ての $m \geq N_1$ に対して

$$|a_m - \alpha| < |\, a_m - a_k| + |a_k - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となる.

定理 2: 正項級数の収束判定法; 比較判定法

$a_n, b_n > 0$ とする. $n \geq N$ である n に対し a_n が対応する b_n を超えないとする. このとき $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する. 逆に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する.

解説 各項が正数である級数を正項級数と呼ぶ. 正項級数の収束発散の判定は, 他の簡単な級数, とくに等比級数と比較することがある. 上記の定理はそのための基本的な定理である.

この定理は $a_n, b_n > 0$, $n \geq N$ である n と正定数 K に対し $a_n \leq K b_n$ である場合にも成り立つ. 証明方法の手順は全く同じで, $\sum b_n$ が収束する場合には $\sum K b_n$ も収束するという級数の性質を利用する.

証明 まず $\sum b_n$ が収束すると仮定する. 級数は有限個の要素を取り除いても収束発散の性質は変化しない. そこで $\{a_n\}$ から初めの有限個 (N 個) を除いて考えると, 全ての n について $a_n < b_n$ が成り立つことになる. このときの $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初めの n 項の和をそれぞれ s_n, σ_n とすると,

$$s_n \leq \sigma_n$$

である. $\lim_{n\to\infty} \sigma = \sum b_n$ は収束するので, その値を σ とすると,

$$s_n \leq \sigma$$

が成り立つ. これより $\sum a_n$ の収束が証明される.

同様の手順で逆の場合も証明される.

定理 3: 正項級数の収束判定法; 級数との比較

正項級数と等比級数と比較することで, その収束判定を簡単に行うことができる.

コーシーの収束判定法 正項級数 $\sum a_n$ について以下の極限値

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

が存在するとき

(1) $0 \le r < 1$ ならば収束.

(2) $1 < r \le \infty$ ならば発散.

証明 $r < 1$ の場合を考える. このとき $r < \rho < 1$ なる ρ を用意する. 十分大きな n に対して $\sqrt[n]{a_n} < \rho$, すなわち $a_n < \rho^n$ が成り立つ. この関係は全ての n について成り立つとしても一般性は失われない. $\sum \rho^n$ は公比が 1 以下の等比数列の和なので収束する. したがって, [定理 2] の結果から $\sum a_n$ は収束する.

$r > 1$ の場合を考える. このとき十分大きな n に対して $\sqrt[n]{a_n} > 1$, すなわち $a_n > 1$ が成り立つ. このとき級数 $\sum a_n$ は一般項が 0 に近付かないため収束しない (これはコーシーの判定条件 (11.12) から導かれる).

ダランベールの収束判定法 正項級数 $\sum a_n$ について以下の極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

が存在するとき

(1) $0 \le r < 1$ ならば収束.

(2) $1 < r \le \infty$ ならば発散.

証明 $r < 1$ の場合を考える. このとき $r < \rho < 1$ なる ρ を用意する. 十分大きな n に対して $a_{n+1}/a_n < \rho$ が成り立つ. これが $n > N$ について成り立つとすると,

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N \le a_N \rho^{n-N}$$

となる. よって $a_n \le (a_N \rho^{-N})\rho^n$. この関係は全ての n について成り立つとしても一般性は失われない. $\sum \rho^n$ は収束するので [定理 2] の結果から $\sum a_n$ は収束する.

$r > 1$ の場合. このとき十分大きな n に対して $a_{n+1}/a_n > 1$ が成り立つ. よってある N より大きな n では $a_n < a_{n+1} < a_{n+1} < \cdots$ となり級数 $\sum a_n$ は一般項が 0 に近付かない. したがって $\sum a_n$ は収束しない.

定理 4: 絶対収束

絶対収束級数, すなわち任意の正数 ε に対しある自然数 N をとると $n \geq N$ を満たす全ての n について

$$\left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \alpha\right| < \varepsilon \tag{11.13}$$

が成り立つ場合, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

解説 これは級数の収束判定時に非常に強力な道具となる. 級数の収束を議論する場合に, その各項の絶対値からなる級数の収束を議論すればよいからである. この絶対値級数は正項級数なので, その収束判定は前出のコーシーの判定条件, ダランベールの判定条件を用いて行うことができる.

なお $\sum a_n$ が収束しても $\sum |a_n|$ は収束する場合もあるし発散する場合もある. $\sum a_n$ が収束して $\sum |a_n|$ が発散するとき $\sum a_n$ は**条件収束する**という.

証明 $n \leq m$ である自然数に対し

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots |a_m|$$

が成り立つ. これは $n = 1$ としても一般性を失わない. これより

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つ. したがって $\sum a_n$ は収束する.