解答上の注意

1. 問題用紙 4 枚, 答案用紙 4 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x, y, z)$, $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla\cdot(\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$

(2) $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(4) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

問題 2

球座標系 (r, θ, ϕ) について以下の問に答えよ.

(1) (x, y, z) を (r, θ, ϕ) を用いて表せ.

(2) スケール因子 h_r, h_θ, h_ϕ を求めよ.

(3) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるスカラー φ の勾配は

$$(\text{grad}\ \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_j は u_j 成分であることを示す. これを用いて球座標系における φ の勾配の各成分の表式を求めよ.

(4) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3}\right)$$

と表される. これを用いて球座標系における $\boldsymbol{A}$ の発散の表式を求めよ.

(5) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転は

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_{u_i} = \varepsilon_{ijk}\frac{1}{h_j h_k}\frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_i は u_i 成分であることを示す. これを用いて球座標系における $\boldsymbol{A}$ の回転の各成分の表式を求めよ.

(6) 上記の (3), (4) の結果を利用し, 球座標系における

$$\nabla^2\varphi$$

の表式を求めよ.

問題 3

マックスウェルの電磁方程式は以下の 4 本の式からなる.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{I}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}.\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ は電場と磁場, $\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}$ は電束密度とと磁束密度, ρ は電荷密度, $\boldsymbol{I}$ は電流密度である. $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{I}$ の間には以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= \varepsilon\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{B} &= \mu\boldsymbol{H},\\ \boldsymbol{I} &= \sigma\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

ここで ε,μ,σ はそれぞれ誘電率と透磁率, 電気伝導率である. 以下では ε,μ,σ は定数であるとする.

(1) $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ の満たす方程式を求めよ.

(2) (1) において, 真空中の場合 ($\rho=0$, $\sigma=0$) の場合の方程式を求めよ.

問題 4

密度一定の理想流体の運動方程式と連続の式 (質量保存則) は, それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} &= -\nabla(\frac{p}{\rho}), \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0 \end{aligned}$$

である. ここで $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ は速度ベクトル, p, ρ はそれぞれ圧力と密度である. 以下では渦無し流の場合 ($\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$) を考える.

(1) 流体中の曲線 OP に沿った線積分

$$\int_{\mathrm{OP}} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$$

は経路によらないことを示せ.

(2) 上記の積分の値を点 P(x, y, z) の座標と時間の関数として $\varphi(x, y, z, t)$ と表すと, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$$

と表される. このときスカラー関数 φ の満たす式として, 連続の式から

$$\nabla^2\varphi = 0$$

が導かれることを示せ.

(3) 定常な場合, 運動方程式から

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = 一定$$

が導かれることを示せ. ここで $v = |\boldsymbol{v}|$ である (ヒント: 途中の変形に問題 1 (3) を利用する).