

4.1 ベクトル場の線積分

空間内の領域 D において定義されたベクトル場

$$\mathbf{A} = a_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + a_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + a_3(x, y, z)\mathbf{e}_3$$

と D 内の無限小変移 $d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_1 + dy\mathbf{e}_2 + dz\mathbf{e}_3$ との内積を, 経路 C に沿って積分したもの

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C a_1(x, y, z) dx + a_2(x, y, z) dy + a_3(x, y, z) dz \quad (4.1)$$

をベクトル \mathbf{A} の C に沿う線積分と呼ぶ.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_C (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \alpha \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \beta \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}.$$

(ii)

$$\int_{-C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

ここで経路 $-C$ は経路 C を逆向きにたどる経路である.

(2) スカラー場 ϕ の勾配ベクトル場 $\nabla\phi$ の空間内の点 A から点 B にいたる経路 C 沿った線積分は

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

となることを示せ. ここで $\phi(A)$ は点 A における ϕ の値を表す.

4.2 ベクトル場の面積分

空間内の領域 D 内の曲面 S を含む領域において定義されたベクトル場

$$\mathbf{A} = a_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + a_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + a_3(x, y, z)\mathbf{e}_3$$

に対し、ベクトル場 \mathbf{A} の面積分を以下のように定義する.

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S a_1 n_1(x, y, z) + a_2 n_2(x, y, z) + a_3 n_3(x, y, z) dS. \quad (4.2)$$

ここで $d\mathbf{S}$, dS はそれぞれ曲面 S 上のベクトル面積素と面積素, \mathbf{n} は面積素 dS の法線ベクトルで, n_i はその各成分である.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_S (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \alpha \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \beta \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

(ii)

$$\int_{-S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

ここで $-S$ は S の法線ベクトルを逆向きにとることを示す.

(2) \mathbf{r} を位置ベクトルとするとき,

$$\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$$

を, S が以下の場合について求めよ. ただし法線ベクトルの向きは S の内側から外側にとる.

(i) 単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(ii) 平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ で囲まれる立方体の表面.

4.3 ガウスの定理

一階微分可能なベクトル場 \mathbf{A} と、 \mathbf{A} が存在する空間内の閉曲面 S および S によって囲まれた領域 V を考える。このとき、

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (4.3)$$

が成り立つ。これを **ガウスの定理** と呼ぶ。

(1) 領域 V として xyz 直線直交座標系における微小体積を考えることにより、(4.3) が成り立つことを示せ。

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ。ただし f, g はスカラー関数、 $\frac{\partial}{\partial n}$ は面要素 dS の法線方向微分、左辺の面積分は閉曲面 S について行うものとする。

(i)

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_V \nabla^2 f dV$$

(ii)

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_V \nabla \cdot (f \nabla g) dV$$

(3) 密度 $\rho(x, y, z, t)$ である流体が速度 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ で運動しているとする。流体のわきだしも吸い込みもないとすると、以下の方程式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.4)$$

(4) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される。このとき単位面積を単位時間に通過する熱 q ($\text{J}/\text{m}^2\text{sec}$) は

$$q = -k \nabla T \quad (4.5)$$

と表される。ここで k は熱伝導率 (thermal conductivity) である。このような熱輸送過程を熱伝導と呼ぶ。熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合、温度変化は以下の式で表されることを示せ。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T. \quad (4.6)$$

ここで κ は熱拡散率 (thermal diffusivity) で、物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c_p を用いて $\kappa = k/\rho c_p$ と表される。

4.4 ストークスの定理

一階微分可能なベクトル場 A と, A が存在する空間内の閉曲線 C および C によって囲まれた曲面 S を考える. このとき,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.7)$$

が成り立つ. これを ストークスの定理 と呼ぶ. ただし法線ベクトル n の向きは C の正方向 (C に囲まれた領域を右側に見る向き) に進む右螺の進む向きにとる.

- (1) 曲面 S として xyz 直線直交座標系における xy 平面に平行な面要素を考えることにより, (4.7) が成り立つことを示せ.
- (2) 閉曲線 C に沿って発生する電場を E とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

である. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$ であることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (4.8)$$

を求めよ. ここで B は磁束密度である.

4.5 平面におけるグリーンの定理

- (1) xy 平面上の $a \leq x \leq b$ の区間において, $\varphi_2(x) \leq \varphi_1(x)$ である関数によって与えられる領域

$$D = \{(x, y) | \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_1(x), a \leq x \leq b\}$$

を定義する. 領域 D 内で定義された一階微分可能な関数 $P(x, y)$ について,

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_C P dx \quad (4.9)$$

が成り立つことを示せ. ここで右辺の線積分の経路 C は D を囲む境界線を反時計周りに一周するものである.

- (2) (1) と同様の手順を用いることで, 領域 D 内で定義された一階微分可能な関数 $Q(x, y)$ について,

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_C Q dy \quad (4.10)$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 任意の領域 D に対して (4.9) または (4.10) が成り立つことを示せ.

(4.9) と (4.10) の和

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy \quad (4.11)$$

は平面におけるグリーンの定理である.