6.1 湧点とポアソンの方程式

ベクトル場において発散が 0 でない場所を**湧点**という. 湧点のまわりを囲む閉曲面を S とし, S に囲まれた領域を V とするとき,

$$\int_v \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV \tag{6.1}$$

を S 内の湧点の強さという. ガウスの定理から,

$$\int_v \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

である. したがって, 湧点の強さとは曲面 S から外に出る $\boldsymbol{A}$ の流線[1] の数である.

(1) 電荷 q と q を囲む閉局面上における電場 E との間には, ガウスの定理より

$$q = \int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

が成り立つ. 電荷密度を ρ とするとき,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho$$

となることを示せ.

(2) $\boldsymbol{E}$ のスカラーポテンシャルを φ とするとき,

$$\nabla^2\varphi = -\rho \tag{6.2}$$

となることを示せ.

(6.2) は**ポアソンの方程式**とよばれる.

[1]その接線ベクトルが各点での $\boldsymbol{A}$ の方向を持つ曲線を流線という. $\boldsymbol{A}$ の強さをは流線を疎または密に書くことで表し, $\boldsymbol{A}$ と直角な単位面積あたりを通過する流線の数を $\boldsymbol{A}$ に比例するようにとる. 以下では流線の数は $\boldsymbol{A}$ の大きさに等しいとする.

6.2 渦

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ において回転が 0 でない場合, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ には**渦**があるという. このとき $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の流線を**渦線**という. $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の発散は 0 なので渦線の両端は無限遠にまで達しているか, 閉じているか, または境界に達しているかのいずれかである.

渦のあるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の存在する領域中に閉曲線 C を考え, C に囲まれた曲面 S 上での面積分

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{6.3}$$

を曲線 C に囲まれた渦の強さという. ストークスの定理によれば

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\,d\boldsymbol{r}$$

である.

(1) 渦線を側面境界に持つような管を**渦管**という. 渦管ではどのような横断面をとっても, そこにおける渦の強さは等しいことを示せ.

6.3 スカラーポテンシャル

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ がスカラーポテンシャル φ を持つとき,

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = -\nabla\times(\nabla\varphi) = 0$$

なので $\boldsymbol{A}$ には渦がない. このようなベクトルを渦無しのベクトル, または**ラメラー状ベクトル**という.

ここでは以下の手順にしたがって, $\nabla\times\boldsymbol{A} = 0$ のときにはスカラーポテンシャル φ が存在することを示す.

(1) 点 P, Q を通る曲線 PQ に沿った線積分

$$\int_{\mathrm{PQ}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$$

は, 曲線のとり方によらず点 P の位置だけによることを示せ.

(2) 上記の積分の値を $-\varphi$ とするとき,

$$\boldsymbol{A} = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

となることを示せ.

これよりベクトル場がスカラーポテンシャルを持つ必要十分条件は, ベクトル場に渦がないことであることがわかる.

6.4 グリーンの公式

(1) 閉曲面 S とそれによって囲まれた領域 V が与えられているとする. スカラー関数 φ, ψ に対し, 以下の公式 (グリーンの定理) が成り立つことを示せ.

$$\oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS = \int_V (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi)\, dV \tag{6.4}$$

$$\oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi)\, dV \tag{6.5}$$

ここで $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}, \dfrac{\partial \psi}{\partial n}$ は曲面 S の法線方向微分であり, 法線は閉曲面の内側から外側の方向を正にとる.

(2) 領域 V 内の点 O から P までの距離を r とする. このとき (6.5) において $\psi = 1/r$ とした

$$\oint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS = 4\pi \varphi_0 + \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi\, dV \tag{6.6}$$

が成り立つことを示せ. ここで φ_0 は V 内の点 O における φ の値である (ヒント: 点 O では $1/r$ は発散してしまうため, V から O を中心とした半径 ε の球を除いた領域 V' について (6.5) を用い, その後 $\varepsilon \to 0$ の極限を考える).

(6.6) において $\nabla^2 \varphi = -\rho$ とすると,

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho}{r}\, dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS$$

となる. これより涌点の密度分布 ρ と曲面上における $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ が与えられれば, V 内のポテンシャル φ の値は確定することがわかる.

6.5 ベクトルポテンシャル

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が別のベクトル場 $\boldsymbol{p}$ の回転に等しいとき, すなわち

$$\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{p}$$

のとき, $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{A}$ の**ベクトルポテンシャル**という. このようなベクトルを回転的ベクトル, または**ソレノイド状ベクトル**という. このとき

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{q}) = 0$$

より $\boldsymbol{A}$ は非発散である.

(1) $\boldsymbol{A}$ が非発散である場合に, $\boldsymbol{A}$ の各成分を用いてベクトルポテンシャル $\boldsymbol{p}$ の各成分を表せ. 簡単のため, $\boldsymbol{p}$ の z 成分は 0 とせよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{p}$ が $\nabla\cdot\boldsymbol{p} = 0$ であるとする. このとき

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}$$

とおくと

$$\nabla^2\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{c}$$

となることを示せ.

上記のような $\boldsymbol{c}$ を導入すると, あとは (6.6) を用いてベクトルポテンシャル $\boldsymbol{p}$ を求めることができる.

6.6 波動方程式

マックスウェルの電磁方程式は以下の 4 本の式からなる.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho, \tag{6.7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{6.8}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{6.9}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{6.10}$$

ここで $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ は電場と磁場, $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ は電束密度とと磁束密度, ρ は電荷密度, $\boldsymbol{I}$ は電流密度である. $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{I}$ の間には以下の関係が成り立つ.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{B}, \tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \tag{6.12}$$

$$\boldsymbol{I} = \sigma\boldsymbol{E}. \tag{6.13}$$

ここで ε, μ, σ はそれぞれ誘電率と透磁率, 電気伝導率である.

(1) $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ の満たす方程式を求めよ.

(2) (1) において, 真空中の場合 ($\rho = 0$, $\sigma = 0$) の場合の方程式を求めよ.

6.7 非圧縮性流体の運動

密度一定の理想流体の運動方程式と連続の式 (質量保存則) は, 以下の方程式で記述される.

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla(\frac{p}{\rho}), \tag{6.14}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{6.15}$$

ここで $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ は速度ベクトル, p, ρ はそれぞれ圧力と密度である.

(1) (6.14) の両辺の回転をとることで渦度方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{v}) = \nabla\times[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})]$$

をもとめよ. ここで渦度とは $\nabla\times\boldsymbol{v}$ のことである.

(2) 渦無し流の場合 ($\nabla\times\boldsymbol{v} = 0$) の場合, スカラー関数 $\phi(x, y, z, t)$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$$

と書けることを確かめよ (ϕ は速度ポテンシャルと呼ばれる).

(2) 渦無し流の場合, 上記のスカラー関数 ϕ は

$$\nabla^2\phi = 0$$

を満たすことを示せ (この式はラプラス方程式と呼ばれる).

(3) 定常な渦無し流の場合, 運動方程式から

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{一定}$$

が導かれることを示せ (ベルヌーイの方程式). ここで $v = |\boldsymbol{v}|$ である.