

## 解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 4 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

## 問題 1

- (1) 任意の 2 つの複素数  $z_1, z_2$  に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

- (2) ド・モアブルの公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が成り立つことを示せ.

- (3)  $z$  を複素数とするととき,  $z^3 = 1$  の根を全て求め, それを複素平面上に図示せよ.

## 問題 2

$z$  を複素数とするととき以下の周回積分を求めよ.

(1)  $\oint_C \frac{1}{z-a} dz$

ただし  $a$  は複素数, 積分路  $C$  はその内部に  $z = a$  を含む閉曲線とする.

(2)  $\oint_C \frac{1}{z^2 + b^2} dz$

ただし  $b$  は実数, 積分路  $C$  は  $z = ib$  をその内部に含む閉曲線とする.

(3)  $\oint_C e^{iaz} dz$

ただし  $a$  は実数, 積分路  $C$  は原点を中心とする半径  $r$  の円とする.

### 問題 3

次の関数の極とその位数, その極における留数を求めよ.

$$(1) \frac{z^3 + 5}{z(z-1)^3}$$

$$(2) \frac{\cos z}{z^3}$$

$$(3) \frac{1}{\sin z}$$

### 問題 4

複素積分を利用して以下の積分を求めよ. ただし  $a, b$  は実数とする.

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} \quad (a > b)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x - ib} dx \quad (b > 0)$$