解答上の注意

1. 問題用紙 4 枚, 答案用紙 4 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x,y,z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x,y,z)$, $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

(2) $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$

(3) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

問題 2

円筒座標系 (r, ϕ, z) について以下の問に答えよ.

(1) (x, y, z) を (r, ϕ, z) を用いて表せ.

(2) スケール因子 h_r, h_ϕ, h_z を求めよ.

(3) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるスカラー φ の勾配は

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_j は u_j 成分であることを示す. これを用いて円筒座標系における φ の勾配の各成分を表せ.

(4) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3}\right)$$

と表される. これを用いて円筒座標系における $\boldsymbol{A}$ の発散を表わせ.

(5) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転は

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_{u_i} = \varepsilon_{ijk}\frac{1}{h_j h_k}\frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_i は u_i 成分であることを示す. これを用いて円筒座標系における $\boldsymbol{A}$ の回転の各成分を表せ.

(6) 上記の (3), (4) の結果を利用し, 円筒座標系における

$$\nabla^2\varphi$$

の表式を求めよ.

問題 3

次の問いに答えよ.

(1) 電荷 q と q を囲む閉曲面 S 上における静電場 E との間には, ガウスの定理より

$$q = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

が成り立つ. 電荷密度を ρ とするとき,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$

となることを示せ.

(2) $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ のとき, 定点 O と任意の点 P を通る曲線 OP に沿った線積分

$$\int_{\mathrm{OP}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

は, 曲線のとり方によらず点 P の位置だけによることを示せ.

(3) 積分形のファラデーの電磁誘導の法則は

$$\int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

と表される, ここで C は空間に固定された任意の閉曲線で, 左辺は C に沿った線積分を表し, Φ は C によって囲まれた面 S を貫く磁束である. 磁束密度を $\boldsymbol{B}$ とすると, 上記の電磁誘導の法則は

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

と表されることを示せ.

問題 4

マックスウェルの電磁方程式は以下の 4 本の式からなる.

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0, \\ \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{I}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ は電場と磁場, $\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}$ は電束密度とと磁束密度, ρ は電荷密度, $\boldsymbol{I}$ は電流密度である. $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{I}$ の間には以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon\boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{B} &= \mu\boldsymbol{H}, \\ \boldsymbol{I} &= \sigma\boldsymbol{E}. \end{aligned}$$

ここで ε,μ,σ はそれぞれ誘電率と透磁率, 電気伝導率である. 以下では ε,μ,σ は定数であるとする.

(1) $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ の満たす方程式を求めよ.

(2) (1) において, 真空中の場合 ($\rho=0$, $\sigma=0$) の場合の方程式を求めよ.