複素解析

解析学は微分と積分を主題にした数学のことである．学部 1 年までは実数関数についての微分積分学を学んできた. 実数関数を複素数上で定義された複素数値をもつ関数に拡張したものが複素関数である. 複素関数を利用した微分と積分からなる数学を複素解析と呼ぶ. 複素関数論とも言葉もよく用いられる. これは複素解析と同義と思ってよい.

ある複素数 z は 2 つの実数 x, y により $z = x + iy$ とあらわされる (i は虚数単位). したがって 1 つの複素数は 2 次元のベクトル (x, y) とみなすことができる. そのため複素解析と 2 次元のベクトル解析とは密接な関連がある. 実際に, 複素積分の定義には線積分の概念を使うし, 複素解析の根幹をなす定理群はストークスの定理の応用として導くことができる.

複素解析, 複素関数を導入するご利益は,「種々の積分を非常に簡単に求められる」ということに尽きる. その応用先は特殊関数論 (あらゆる物理分野をカバー), 流体力学 (特に 2 次元流問題), 弾性体力学等, 物理学と数学の広い範囲に及んでいる. 進んだ応用については後期の物理数学 II (演習) で学ぶことになる.

複素関数の導入

複素関数とは複素数 z を変数とする関数のことで, $w = f(z)$ 等として表す. z の動く範囲を $f(z)$ の **定義域**, そのときの w の動く範囲を**値域** と呼ぶ.

$z = x + iy$ とおけば, $f(z)$ は 2 つの実変数 x, y の関数となる. $f(z)$ の実部および虚部を表す実関数を $u(x, y), v(x, y)$ とおくと,

$$w = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

と表される.

複素関数の場合, 定義域も値域も複素平面上のある領域を示す. そのため複素関数を幾何学的に表すためには 2 つの複素平面が必要となる. z の動く複素平面を z **平面**, w 動く複素平面を w **平面** と呼ぶ. 一般に定義域を表す記号として D, 値域を表す記号として D' を用いる.

6.1 複素数の性質

複素数 z は任意の実数 x, y と虚数単位 i を用いて $z = x + iy$ と定義される. x, y はそれぞれ z の **実部** (real part), **虚部** (imaginary part) と呼び, $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$ と表す.

(1) $-i$ の平方根を求めよ.

(2) 2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ の和, 差, 積は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

と表される. このとき z_1/z_2 の実部, 虚部を x_1, y_1, x_2, y_2 を用いて表せ.

(3) 複素数 $z = x+iy$ の虚部の符号を変えたもの $x-iy$ を z の**共役複素数** (complex conjugate) と呼び, $\bar{z}$ と表す. このとき以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

(4) 複素数 $z = x + iy$ の絶対値 $|z|$ は $\sqrt{x^2 + y^2}$ と定義される. このとき任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{(三角不等式)}$$

(5) 一般に n 個の複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \tag{6.1}$$

6.2 複素数の指数関数

a, t は実数とする. このとき指数関数 e^{at} は

$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots$$

と無限級数を用いて表される. ただし $0! = 1$ とする. さらに e^{at} は次の微分方程式の初期値問題,

$$\frac{df(t)}{dy} = af(t), \quad f(0) = 1,$$

の解である.

以下では a を複素数に拡張可能であるとする.

(1) オイラーの公式

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{6.2}$$

が成り立つことを示せ. ここで y は実数である.

(2) 任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ となることを示せ (ヒント: e^{at} が上記の微分方程式の解であることを利用する).

6.3 複素数の極形式

複素数 $z = x+iy$ (x, y は実数) は横軸に実数, 縦軸に虚数にとった **複素平面** (complex plane) 上のある 1 点として表現される. このとき

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \tag{6.3}$$

と表される. これを複素数の **極形式** という. 最後の等号関係はオイラーの公式を用いた. ここで $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, θ は z の **偏角** (argument) と呼ばれ, $\theta = \arg z$ と表される.

(1) z が実数の場合および純虚数の場合, $\arg z$ はそれぞれどうなるか.

(2) 次の複素数を極形式で表せ

$$i, \quad -i, \quad 1-i, \quad 1+\sqrt{3}i$$

(3) ド・モアブルの公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \tag{6.4}$$

が成り立つことを示せ.

(4) $z^3 = 1$ の根を全て求め, それを複素平面上に図示せよ.

(5) 任意の自然数 n に対し $z^n = 1$ の根は複素平面上でどのような幾何学的位置にあるか.

6.4　オイラーの公式の利用

オイラーの公式 (1.2), ド・モアブルの公式 (1.3) を用いて以下の公式が成り立つことを示せ.

(1) $\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 \mp \sin\theta_1\sin\theta_2$

(2) $\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 \pm \sin\theta_1\cos\theta_2$

(3) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(4) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$