

解答上の注意

1. 問題用紙 3 枚, 答案用紙 3 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z)$ はスカラー関数, $\mathbf{A}(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

- (1) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- (2) $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$
- (3) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

問題 2

ある点 (たとえば原点) からの距離のみによって決まる力を中心力と呼ぶ. 中心力 F は位置ベクトル r を用いて一般に

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

と表される. ここで $f(r)$ は r のみによって決まる関数である. このとき中心力の場の中で運動する物体について, $r \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ は時間によらず一定であることを示せ.

問題 3

極座標系 (r, θ, ϕ) について以下の問に答えよ.

- (1) (x, y, z) を (r, θ, ϕ) を用いて表せ.
- (2) スケール因子 h_r, h_θ, h_ϕ を求めよ.
- (3) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるスカラー φ の勾配は

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_j は u_j 成分であることを示す. これを用いて極座標系における φ の勾配の各成分を表せ.

- (4) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル \mathbf{A} の発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right)$$

と表される. これを用いて極座標系における \mathbf{A} の発散を表わせ.

- (5) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル \mathbf{A} の回転は

$$(\nabla \times \mathbf{A})_{u_i} = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_i は u_i 成分であることを示す. これを用いて極座標系における \mathbf{A} の回転の各成分を表せ.

- (6) 上記の (3), (4) の結果を利用し, 極座標系における

$$\nabla^2 \varphi$$

の表式を求めよ.

問題 4

- (1) \mathbf{A} が存在する空間内の閉曲面 S および S によって囲まれた領域 V を考える. このとき 領域 V として xyz 直交直線座標系における微小体積を考えることにより, ガウスの定理

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

を証明せよ.

- (2) \mathbf{A} が存在する空間内の閉曲線 C および C によって囲まれた曲面 S を考える. 曲面 S として xyz 直交直線座標系における xy 平面に平行な面要素を考えることにより, ストークスの定理

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$$

が成り立つことを示せ. ただし法線ベクトル \mathbf{n} の向きは C の正方向 (C に囲まれた領域を左側に見る向き) に進む右螺の進む向きにとる.