5.1 曲線のパラメーター表示

点 P の座標が変数 t の連続関数になっているとする. t の変化とともに P は空間曲線を描く. P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ とすれば

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=x(t)\boldsymbol{e}_x+y(t)\boldsymbol{e}_y+z(t)\boldsymbol{e}_z$$

である. これを曲線の**パラメーター** t **による表示** と呼ぶ. t が $a\le t\le b$ の範囲を変化する時, $t=a$ に対応する P の座標を始点, $t=b$ に対応する座標を終点と呼ぶ. 曲線上の各点の接線ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ は

$$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

で与えられる. この式は以下のようにも書ける

$$d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{e}_x+dy\boldsymbol{e}_y+dz\boldsymbol{e}_z=\left(\frac{dx}{dt}\boldsymbol{e}_x+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{e}_y+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{e}_z\right)dt$$

$d\boldsymbol{r}$ は線素ベクトルと呼ばれる.
t が微少量変化する時の線素 (点 P の移動距離) ds は

$$ds=\sqrt{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt=|\boldsymbol{r}'(t)|dt$$

で与えられる. これを始点から終点まで積分すると曲線全体の長さ s が得られる.

$$s=\int_0^s ds=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt$$

以下具体例を考えよう. 曲線 $\boldsymbol{r}(t)=p\cos t\,\boldsymbol{e}_x+p\sin t\,\boldsymbol{e}_y+qt\,\boldsymbol{e}_z$ (p,q は実定数) について，以下の問いに答えよ

(1) この曲線の概形を図示せよ

(2) 点 $(p,0,0)$ における接線ベクトルと，接線の方程式を求めよ.

(3) この曲線上の任意の点における接線は z 軸と定角をなすことを示せ.

(4) $0\le t\le 2\pi$ のとき，曲線の長さを求めよ.

5.2 曲面のパラメーター表示

点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ が 2 変数 u, v の連続関数である時，u, v の変化とともに P は曲面を描く. これを曲面の**パラメーター** u, v **による表示** と言う. これを成分で書き下すと

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{e}_x + y(u, v)\boldsymbol{e}_y + z(u, v)\boldsymbol{e}_z$$

となる.
このとき v を固定して u を動かすと $\boldsymbol{r}(u, v)$ は 1 つの曲線を描く. これを u-曲線 という. 同様に u を固定して v を動かして得られる曲線を v-曲線という. u, v-曲線の接線ベクトル $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ はそれぞれ $\boldsymbol{r}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u}, \boldsymbol{r}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v}$ で与えられる. このとき以下の問いに答えよ.

(1) S 上の各点において S に垂直なベクトルを法線ベクトルと呼ぶ. $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ が点 P (u, v) における法線ベクトルであることを示せ.

(2) 近接した 2 本の u-曲線と近接した 2 本の v-曲線，計 4 本の曲線で囲まれた四辺形状の部分を考える. P_0=P(u, v)，P_1=P$(u, v + \Delta v)$， P_2=P$(u + \Delta u, v)$ とすれば，この部分はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ の作る平行四辺形で近似される. この部分の面積を ΔS とおくと，

$$\Delta S \approx |(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\Delta u \, \Delta v|$$

と近似できることを示せ.

ここから定義される $d\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) du \, dv$ を **ベクトル面積素**, その大きさ $dS = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv$ を **面積素** と呼ぶ[1]. 面積素を全て足しあげることにより曲面 S の面積が求められる. つまり

$$\int_S dS = \int_S |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv$$

である.

[1] より正確にはベクトル面積素の向きには ± の不定性がある. 閉曲面に対しては曲面の外側に向くように符号を定める.

5.3 一般化座標

座標 $\boldsymbol{r}$ を直交直線座標 (x,y,z) に代わる 3 つの変数 (u,v,w) で表す場合を考える. u,v,w はともに x,y,z の関数である. 例えば円筒座標では変数として (r,ϕ,z) を用い，それぞれ x,y,z と次の関係にある.

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ z = z$$

球座標 (r,θ,ϕ) では

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

である.

(1) 直交直線座標と円筒座標の幾何学的関係を図示し，(x,y,z) を (r,ϕ,z) を用いて表せ.

(2) 直交直線座標と球座標の幾何学的関係を図示し，(x,y,z) を (r,θ,ϕ) を用いて表せ.

u 曲線とは，v,w を固定して u を変化させた時に座標 $\boldsymbol{r}$ が描く軌跡のことを言う. その接ベクトル $\boldsymbol{r}_u$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{e}_z$$

v,w 曲線およびその接ベクトル $\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_w$ は同様に定義される. これら接ベクトルの方向をそれぞれ u,v,w 方向という.

(3) 円筒座標において $\boldsymbol{r}_r,\boldsymbol{r}_\phi,\boldsymbol{r}_z$ を $r,\phi,z,\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ を用いて表せ.

(4) 球座標において $\boldsymbol{r}_r,\boldsymbol{r}_\theta,\boldsymbol{r}_\phi$ を $r,\theta,\phi,\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ を用いて表せ.

u 曲線のスケール因子 h_u とは，u 方向接ベクトルの長さ $|\boldsymbol{r}_u|$ のことを言う. ここから u 方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_u$ が

$$\boldsymbol{e}_u = \frac{\boldsymbol{r}_u}{h_u}\ \text{または}\ \boldsymbol{r}_u = h_u\boldsymbol{e}_u$$

と定義される. v,w 曲線のスケール因子 h_v,h_u，v,w 方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_v,\boldsymbol{e}_w$ も同様に定義される. $\boldsymbol{e}_u,\boldsymbol{e}_v,\boldsymbol{e}_w$ は一般化座標系 (u,v,w) での基本単位ベクトルである.

(5) 円筒座標において h_r,h_ϕ,h_z を求めよ.

(6) 球座標において h_r,h_θ,h_ϕ を求めよ.

5.4 面積素と体積素

一般化座標 (u_1, u_2, u_3) における面積素 $d\boldsymbol{S}_{ij}$ と体積素 dV はそれぞれ

$$d\boldsymbol{S}_{ij} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_j \, du_i \, du_j$$

$$dV = |\boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3)| \, du_1 \, du_2 \, du_3$$

であらわされる. ただしここでは和の規約は用いず式の簡略化のため $\boldsymbol{r}_{u_j} = \boldsymbol{r}_j, h_{u_j} = h_j$ と記す.

(1) 各点で接ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ (i=1,2,3) が互いに直交している座標系を直交曲線座標という. このとき

$$d\boldsymbol{S}_{ij} = h_i h_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j du_i du_j = \varepsilon_{ijk} h_i h_j \boldsymbol{e}_k du_i du_j$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3$$

を示せ. ここで $\boldsymbol{e}_j$ は u_j 方向基本単位ベクトルをあらわす. 和の規約は用いない.

(2) 円筒座標と球座標は直交曲線座標であることを示せ

(3) 円筒座標と球座標における体積素の表式をそれぞれ求めよ.

5.5　直交曲線座標における勾配

スカラー場 φ の勾配 grad φ はベクトルであり，直交直線座標系の基本単位ベクトルを用いて

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$$

と表される．これを直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表すには，この直交曲線座標の基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_{u_j}$ を用いる. 各成分 $(\mathrm{grad}\,\varphi)_{u_j}$ は grad φ を各基本単位ベクトルの方向に射影したものなので

$$(\mathrm{grad}\,\varphi)_{u_j} = \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \boldsymbol{e}_{u_j} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_{u_j}$$

となる.

(1) $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_{u_j} = \dfrac{1}{h_j}\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ を示せ．この表式では和の規約は用いず，スケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と記すものとする [ヒント：問題 7.4 の $\boldsymbol{e}_{u_j}$ の定義を思い出す].

(2) 恒等式 $\dfrac{df(x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi))}{d\xi} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{dx_i}{d\xi}$ を利用し，

$$(\mathrm{grad}\,\varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

を示せ. この表式も和の規約は用いない.

(3) 円筒座標における勾配は

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

と表されることを示せ.

(4) 上と同様に球座標における grad φ の表式を書き下せ.

5.6 直交曲線座標における発散

直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表されるベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_{u_i}$ の発散の表式について考える．これは発散の定義から丹念に計算しても導けるが面倒である．ここではガウスの定理 $\int_V \nabla \boldsymbol{A} dV = \int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を使った導出を行う．

(1) 体積 V として，$u_i, u_i + \Delta u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 一定の面で囲まれた微小 6 面体を考える．このとき

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV \approx \nabla \cdot \boldsymbol{A} \, h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

を示せ．ただしスケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と記す．

(2)

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \;\; = & \quad \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} \int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3} [A_1 h_2 h_3 du_2 du_3]_{u_1=u_1}^{u_1=u_1+\Delta u_1} \\ & + \int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3} \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} [A_2 h_3 h_1 du_3 du_1]_{u_2=u_2}^{u_2=u_2+\Delta u_2} \\ & + \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} [A_3 h_1 h_2 du_1 du_2]_{u_3=u_3}^{u_3=u_3+\Delta u_3}\end{aligned}$$

を示せ．右辺はさらに

$$\approx \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right) \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

と近似できることを示せ．

(1) と (2) の結果を比較すると $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right)$$

と書けることが分かる．これが曲線直交座標系での発散の一般形である．

(3) 円筒座標における $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ の表式を求めよ．

(4) 球座標における $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ の表式を求めよ．

5.7 直交曲線座標における回転

直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表されるベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_{u_i}$ の回転の表式について考える. これは回転の定義から丹念に計算しても導けるが面倒なので，ここではストークスの定理 $\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\, dS = \oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を使った導出を行う.

(1) u_3 が一定の面内で $u_2, u_2+\Delta u_2$ 一定の 2 本の u_1 曲線と，$u_1, u_1+\Delta u_1$ 一定の 2 本の u_2 曲線, 計 4 本の曲線で囲まれた内部を面 S にとる. このとき

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \approx (\nabla\times\boldsymbol{A})_3\, h_1 h_2 \Delta u_1 \Delta u_2$$

を示せ. ここで $(\nabla\times\boldsymbol{A})_3$ は $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の u_3 方向成分を表す. スケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と略記している.

(2) 線積分を $(u_1, u_2) \to (u_1+\Delta u_1, u_2) \to (u_1+\Delta u_1, u_2+\Delta u_2) \to (u_1, u_2+\Delta u_2) \to (u_1, u_2)$ の順に行うことに注意して

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} [A_1 h_1]_{u_2=u_2}^{u_2=u_2+\Delta u_2} du_1 + \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} [A_2 h_2]_{u_1=u_1+\Delta u_1}^{u_1=u_1} du_2$$

を示せ. 右辺はさらに

$$\approx \left(\frac{\partial A_1 h_1}{\partial u_2} - \frac{\partial A_2 h_2}{\partial u_1}\right) \Delta u_1 \Delta u_2$$

と近似できることを示せ.

(1) と (2) を比較すると，

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial A_1 h_1}{\partial u_2} - \frac{\partial A_2 h_2}{\partial u_1}\right)$$

が導かれる. $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の各 u_i 成分の一般的な表式は

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

である.

(3) 円筒座標における $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の表式を求めよ.

(4) 球座標における $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の表式を求めよ.

5.8 直交曲線座標におけるラプラシアン

(1) 勾配と発散一般形から直交曲線座標におけるラプラシアン $\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi)$ の一般形を導け.

(2) 円筒座標における $\nabla^2\varphi$ の表式を求めよ.

(3) 球座標における $\nabla^2\varphi$ の表式を求めよ.