11.1 多価関数の分枝と分岐点

関数 $w = f(z)$ において，z の 1 つの値に対し w の値が複数個存在する場合，w を z の多価関数とよぶ.

多価関数の例として関数 $w = z^{1/2}$ を考える．この場合 $z = re^{i\theta}\,(0 \le \theta \le 2\pi)$ に対して 2 つの異なる関数値 w_1, w_2

$$w_1 = r^{1/2}e^{i\theta/2}, w_2 = r^{1/2}e^{i(\theta/2+\pi)}$$

が対応する．これより $w = z^{1/2}$ は z の 2 価関数であることがわかる．この w_1, w_2 を，$w = z^{1/2}$ の**分枝** (ぶんし) と呼ぶ.

(1) 次の関数の分枝を求めよ．ただし $a, b \in \boldsymbol{R}$ とする.

(i) $w = z^{1/3}$ (ii) $w = (z-1)^{1/2}$ (iii) $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ (iv) $w = \log z$

さらに $w = z^{1/2}$ を例に話を進める．z 平面上で与えられた点 P から出発し，原点を反時計周りに 1 周して元の点 P に戻ると z の偏角は 2π 増える．このとき各分枝の偏角は π 増えるので, w_1 は w_2 に, w_2 は w_1 に移る．一般に z 平面上のある点を 1 周することによりある分枝から別の分枝へ移るとき，この点を**分岐点** (ぶんきてん) と呼ぶ．$z = 0$ は $w = z^{1/2}$ の分岐点である.

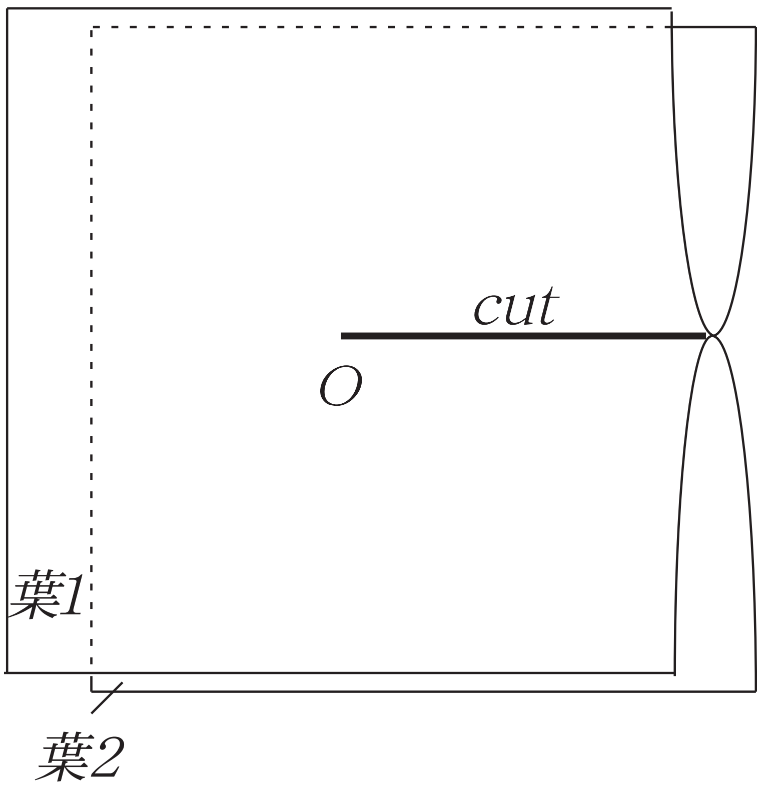
$z = \infty$ (無限遠点) も $w = z^{1/2}$ の分岐点である．これは原点を 1 周することが無限遠点の周りを 1 周することにもなっているからである. 一般に十分半径の大きな円周を 1 回転することで別の分枝へ移ると, 無限遠点は分岐点である.

分岐点を n 周して最初の分枝に戻る時，その分岐点を $n-1$ **位の分岐点** と呼ぶ. $w = z^{1/2}$ の例では $z = 0, \infty$ は共に 1 位の分岐点である．n が有限の分岐点は**代数的分岐点**，無限大の分岐点は**対数的分岐点**と呼ばれる.

(2) (1) の i) 〜 iv) の関数の分岐点を求めよ．それぞれ何位の分岐点か.

11.2 リーマン面

z 平面を複数枚，分枝の数だけ用意し，1 枚 1 枚の z 平面上の点はそれぞれ相異なる 1 つの分枝に写像されるものとする．また各平面には切れ目が入っており，切れ目を介して他の面へ連続的に乗り移れるものとする．このように複数枚の z 平面をつなぎ合わせた平面を **Riemann 面**という．このとき Riemann 面上の点と関数値とは 1 対 1 対応する．切れ目は**切断** (cut) と呼び，おのおのの z 平面を葉 (よう) という．



再び $w = z^{1/2}$ を例に取って Riemann 面の作り方を説明する．この場合分枝は 2 つあるので z 平面を 2 枚用意する．葉 1 では w_1 へ写像され，葉 2 では w_2 へ写像される．切れ目は分岐点を繋ぐようにいれる．ただし繋ぎ方は一意ではなく任意性がある．この場合 $z = 0, \infty$ が分岐点だった．そこで実軸の正の部分 $x > 0$ を切断に選ぶ．葉 1 上にあった点を原点の周りに反時計周りに動かす．このとき最初に切断をまたぐとき葉2 へ移り，次に切断をまたぐ時は葉 1 に移ると約束する．結局原点を 2 周してもとの点に帰ることになる．

11.3　多価関数の積分

次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx \quad (a, b \in \boldsymbol{R}, b > a)$

(2) $\displaystyle \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx \quad (0 < a < 1)$

11.4 等角写像

$t \in \boldsymbol{R}, \alpha \leq t \leq \beta$ の変数 t に対し, $z = \varphi(t)$ は微分可能とし, その導関数 $\varphi'(t)$ は連続でかつ 0 にならないと仮定する. このとき

$$z = \varphi(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

は z 平面上のなめらかな曲線 C となる. z の t に対する微分

$$\frac{dz}{dt} = \varphi'(t) = a(t)e^{i\theta(t)}$$

は C の接線ベクトルを表し,

$$\arg\,\varphi'(t)$$

は接線の傾きを表す.
z 平面上の点から w 平面上への写像 $w = f(z)$ を考える. $f(z)$ が z 平面内の D 上で正則とし, 曲線 C が D に含まれるとき,

$$w = f(\varphi(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

は w 平面上のなめらかな曲線 Γ を与える. このとき $w_0 = f(\varphi(t_0))$ における Γ の傾きは

$$\arg\,w'(t_0) = \arg\,f'(z_0) + \arg\,\varphi'(t_0)$$

となる.

(1) 点 z_0 を通る 2 つの曲線 C_1, C_2 が $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ で表され, $f(z)$ によるそれらの像 Γ_1, Γ_2 は $w_1(t), w_2(t)$ で表されるとする. Γ_1, Γ_2 の交点 $w_0 = f(z_0)$ において Γ_2 の接線と Γ_1 の接線とのなす角 $\Delta\theta$ は

$$\Delta\theta = \arg\,w_2'(t_0) - \arg\,w_1'(t_0) = \arg\,\varphi_2'(t_0) - \arg\,\varphi_1'(t_0)$$

と表されることを示せ.

(2) z 平面上の点 z_0, z_1, z_2 によって作られる三角形と, それらの点の $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ による像 w_0, w_1, w_2 によって作られる三角形は相似であること, およびそれらの三角形の面積比は

$$|f'(z)|^2 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

で与えられることを示せ.

(3) (1) の Γ_1, Γ_2 の交点を与える z_0 において $f'(z_0) = 0$ となり, n 階導関数 $f^{(n)}(z_0)$ が最初に 0 でない導関数とする. このとき Γ_2 の接線と Γ_1 の接線とのなす角は C_2 の接線と C_1 の接線とのなす角の n 倍となることを示せ.

(4) $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ はどのような写像の組合せであるか.

11.5 複素速度ポテンシャル

摩擦や外力の働いていない 2 次元非圧縮性流体の運動は, 以下の式によって記述される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{11.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{11.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{11.3}$$

ここで u, v は速度成分, ρ は密度, p は圧力である. 以下では流れが時間に陽によらない定常な流れについて考える.

(1) (11.3) が満たされることから,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

を満たす関数 ψ を導入できることを示せ (ヒント: 「平面におけるグリーンの定理」を利用する).

(2) 渦無しの流れの場合,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

と満たす関数 ϕ を導入できることを示せ (ヒント: 渦無し場の「スカラーポテンシャル」を考える).

(3) 上記の ψ, ϕ は, コーシー・リーマンの関係式を満たすことを確かめよ.

(3) より関数

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

は正則な複素関数を表す. この導関数

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = u - iv$$

は複素速度と呼ばれる. この意味で $f(z)$ は複素速度ポテンシャルと呼ばれる. 以上より, **任意の正則関数はとある非圧縮で渦無しの 2 次元流れを表す**ことがわかる.

(4) $f(z) = Uz$ ($U \in \boldsymbol{R}$) は x 方向に一様な流れを表すことを示せ.

(5) $f(z) = U\left(z + \dfrac{a^2}{z}\right)$ ($U, a \in \boldsymbol{R}$) は xy 面に垂直な半径 a の円筒を横切る流れを表すことを示せ.