

3.1 スカラーの勾配

座標 x, y, z の関数 $f = f(x, y, z)$ が与えられた場合, 点 (x, y, z) における f の勾配 (gradient) は以下のように定義される.

$$\text{grad } f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (3.1)$$

ここで \mathbf{e}_i は i 方向の単位ベクトルである. grad はグラジエント, もしくはグラッドと発音する. (3.1) はハミルトンの演算子

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\text{grad } f = \nabla f$$

と表される.

- (1) 固定点 P から一定の微小距離 dr だけ離れた点 Q がある. 点 P から Q へ移動した際の関数 f の変化が最大となるのは, ベクトル PQ が点 P における ∇f に平行な場合であることを示せ (ヒント: ベクトル PQ を $dr = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$ としてみよ).
- (2) ∇f は $f = \text{一定}$ の面 (これを等位面と呼ぶ) に垂直であることを示せ.
- (3) g を f とは異なるスカラー関数とする場合, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし α, β はスカラーとする.

$$(i) \nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$$

$$(ii) \nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g$$

$$(iii) \nabla \left(\frac{g}{f} \right) = \frac{f \nabla g - g \nabla f}{f^2}$$

$$(iv) \nabla f(g) = \frac{\partial f}{\partial g} \nabla g$$

3.2 スカラー勾配の具体例・スカラーポテンシャル

- (1) 以下の 2 次元直交直線座標系 (x, y) におけるスカラー関数 $f = f(x, y)$ について, $\text{grad } f$ を求めよ. ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする.

$$(i) \quad f = \frac{1}{r} \quad (ii) \quad f = xy \quad (iii) \quad f = 4x^2 + 9y^2$$

- (2) 位置ベクトル $\mathbf{r} = xe_x + ye_y + ze_z$ について, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし $r = |\mathbf{r}|$ である.

$$(i) \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (ii) \quad \nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (iii) \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (iv) \quad \nabla \ln r = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

- (3) 原点に置かれた電荷 q による電場 \mathbf{E} は

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

と与えられる. このとき \mathbf{E} のスカラーポテンシャル φ を求めよ (ヒント: (2) の結果を利用する).

3.3 ベクトルの発散

各成分が座標の関数となっているベクトル

$$\mathbf{A} = a_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + a_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + a_z(x, y, z)\mathbf{e}_z = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

を考える (このとき \mathbf{A} をベクトル場と呼ぶ). \mathbf{A} の発散 (divergence, ダイバージェンス) は以下のように定義される.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (3.2)$$

(1) $\varphi = \varphi(x, y, z)$ をスカラー関数とすると,

$$\operatorname{div} \cdot (\varphi \mathbf{A}) = (\operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi \operatorname{div} \cdot \mathbf{A}$$

となることを示せ.

(2) スカラー関数 φ に対し,

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

となることを示せ.

$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi)$ は $\nabla \cdot (\nabla \varphi)$, $\nabla^2 \varphi$ 等とも表す. とくに ∇^2 を記号 Δ で表し, これをラプラス演算子と呼ぶ.

3.4 ベクトルの回転

ベクトル場 A に対し, その回転 (rotation, ローテーション, ロート) は以下のように定義される.

$$\operatorname{rot} A \equiv \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \quad (3.3)$$

行列式の形で書けば,

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

と表される.

- (1) $\operatorname{rot} A$ の第 i 成分をエディントンのイプシロン ε_{ijk} を用いて表せ.
- (2) スカラー関数 φ に対し $\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$ となることを示せ.
- (3) $\operatorname{div} (\operatorname{rot} A) = 0$ となることを示せ.
- (4) $\operatorname{rot} (\varphi A) = (\operatorname{grad} \varphi) \times A + \varphi \operatorname{rot} A$ となることを示せ.

3.5 発散・回転の物理的解釈

- (1) 3次元空間内の定常な流れを考える. このとき空間内の各点の速度場は $v(x, y, z)$ で与えられる. 流れ場中に空間内のある一点 $P(x, y, z)$ を頂点にもち, 角辺が x, y, z 軸に平行でその長さが (dx, dy, dz) である微小直方体を置く. この直方体から単位時間に流出する流体の総体積は, 近似的に

$$(\operatorname{div} v)_P \times dx dy dz$$

と表されることを示せ. ここで $(\operatorname{div} v)_P$ は点 P における v の発散を表す.

- (2) 原点を通る固定軸の周りに一定の角速度 Ω で剛体が回転しているとする. 剛体の任意の点における位置ベクトルを r とする. r における速度を v とするとき,

(i) $v = \Omega \times r$ となることを示せ.

(ii) $\operatorname{rot} v$ を計算せよ.

ただし Ω は大きさが Ω の角速度ベクトルである.

3.6 ∇ を含む演算

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)$ はスカラー関数, $A(x, y, z), B(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

$$(1) \nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$$

$$(2) \nabla \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \psi) = 0$$

$$(3) \nabla(A \cdot B) = (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A)$$

$$(4) \nabla \cdot (A \times B) = (\nabla \times A) \cdot B - (\nabla \times B) \cdot A$$

$$(5) \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$