

## 4.1 ベクトル場の線積分

空間内の領域  $D$  において定義されたベクトル場

$$\mathbf{A} = a_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + a_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + a_3(x, y, z)\mathbf{e}_3$$

と  $D$  内の無限小変移  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_1 + dy\mathbf{e}_2 + dz\mathbf{e}_3$  との内積を, 経路  $C$  に沿って積分したもの

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C a_1(x, y, z) dx + a_2(x, y, z) dy + a_3(x, y, z) dz \quad (4.1)$$

をベクトル  $\mathbf{A}$  の  $C$  に沿う線積分と呼ぶ.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_C (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \alpha \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \beta \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}.$$

(ii)

$$\int_{-C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

ここで経路  $-C$  は経路  $C$  を逆向きにたどる経路である.

(2) スカラー場  $\phi$  の勾配ベクトル場  $\nabla\phi$  の空間内の点  $A$  から点  $B$  にいたる経路  $C$  沿った線積分は

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

となることを示せ. ここで  $\phi(A)$  は点  $A$  における  $\phi$  の値を表す.

## 4.2 ベクトル場の面積分

空間内の領域  $D$  内の曲面  $S$  を含む領域において定義されたベクトル場

$$\mathbf{A} = a_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + a_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + a_3(x, y, z)\mathbf{e}_3$$

に対し、ベクトル場  $\mathbf{A}$  の面積分を以下のように定義する.

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S a_1 n_1(x, y, z) + a_2 n_2(x, y, z) + a_3 n_3(x, y, z) dS. \quad (4.2)$$

ここで  $d\mathbf{S}$ ,  $dS$  はそれぞれ曲面  $S$  上のベクトル面積素と面積素,  $\mathbf{n}$  は面積素  $dS$  の法線ベクトルで,  $n_i$  はその各成分である.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_S (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \alpha \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \beta \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

(ii)

$$\int_{-S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

ここで  $-S$  は  $S$  の法線ベクトルを逆向きにとることを示す.

(2)  $\mathbf{r}$  を位置ベクトルとするとき,

$$\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$$

を,  $S$  が以下の場合について求めよ. ただし法線ベクトルの向きは  $S$  の内側から外側にとる.

(i) 単位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

(ii) 平面  $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$  で囲まれる立方体の表面.

### 4.3 ガウスの定理

一階微分可能なベクトル場  $\mathbf{A}$  と,  $\mathbf{A}$  が存在する空間内の閉曲面  $S$  および  $S$  によって囲まれた領域  $V$  を考える. このとき,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (4.3)$$

が成り立つ. これを **ガウスの定理** と呼ぶ.

(1) 領域  $V$  として  $xyz$  直線直交座標系における微小体積を考えることにより, (4.3) が成り立つことを示せ.

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ. ただし  $f, g$  はスカラー関数,  $\frac{\partial}{\partial n}$  は面要素  $dS$  の法線方向微分, 左辺の面積分は閉曲面  $S$  について行うものとする.

(i)

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_V \nabla^2 f dV$$

(ii)

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_V \nabla \cdot (f \nabla g) dV$$

(3) 密度  $\rho(x, y, z, t)$  である流体が速度  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  で運動しているとする. 流体のわきだしも吸い込みもないとすると, 以下の方程式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.4)$$

(4) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱  $q$  ( $\text{J}/\text{m}^2\text{sec}$ ) は

$$q = -k \nabla T \quad (4.5)$$

と表される. ここで  $k$  は熱伝導率 (thermal conductivity) である. このような熱輸送過程を熱伝導と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T. \quad (4.6)$$

ここで  $\kappa$  は熱拡散率 (thermal diffusivity) で, 物体の密度  $\rho$  と単位質量あたりの比熱  $c_p$  を用いて  $\kappa = k/\rho c_p$  と表される.

#### 4.4 ストークスの定理

一階微分可能なベクトル場  $A$  と,  $A$  が存在する空間内の閉曲線  $C$  および  $C$  によって囲まれた曲面  $S$  を考える. このとき,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.7)$$

が成り立つ. これを ストークスの定理 と呼ぶ. ただし法線ベクトル  $n$  の向きは  $C$  の正方向 ( $C$  に囲まれた領域を右側に見る向き) に進む右螺の進む向きにとる.

- (1) 曲面  $S$  として  $xyz$  直線直交座標系における  $xy$  平面に平行な面要素を考えることにより, (4.7) が成り立つことを示せ.
- (2) 閉曲線  $C$  に沿って発生する電場を  $E$  とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

である. ここで  $\Phi$  は  $C$  によって囲まれた曲面  $S$  を貫く磁束である.  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$  であることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (4.8)$$

を求めよ. ここで  $B$  は磁束密度である.