

## 5.1 曲線のパラメーター表示

点 P の座標が変数  $t$  の連続関数になっているとする.  $t$  の変化とともに P は空間曲線を描く. P の位置ベクトルを  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  とすれば

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$$

である. これを曲線のパラメーター  $t$  による表示と呼ぶ.  $t$  が  $a \leq t \leq b$  の範囲を変化する時,  $t = a$  に対応する P の座標を始点,  $t = b$  に対応する座標を終点と呼ぶ. 曲線上の各点の接線ベクトル  $\mathbf{r}'(t)$  は

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

で与えられる. この式は以下のようにも書ける

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z = \left( \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z \right) dt$$

$d\mathbf{r}$  は線素ベクトルと呼ばれる.

$t$  が微量変化する時の線素 (点 P の移動距離)  $ds$  は

$$ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = |\mathbf{r}'(t)| dt$$

で与えられる. これを始点から終点まで積分すると曲線全体の長さ  $s$  が得られる.

$$s = \int_0^s ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

以下具体例を考えよう. 曲線  $\mathbf{r}(t) = p \cos t \mathbf{e}_x + p \sin t \mathbf{e}_y + qt \mathbf{e}_z$  ( $p, q$  は実定数) について, 以下の問いに答えよ

- (1) この曲線の概形を図示せよ
- (2) 点  $(p, 0, 0)$  における接線ベクトルと, 接線の方程式を求めよ.
- (3) この曲線上の任意の点における接線は  $z$  軸と定角をなすことを示せ.
- (4)  $0 \leq t \leq 2\pi$  のとき, 曲線の長さを求めよ.

## 5.2 曲面のパラメーター表示

点  $P$  の位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  が 2 変数  $u, v$  の連続関数である時,  $u, v$  の変化とともに  $P$  は曲面を描く. これを曲面のパラメーター  $u, v$  による表示 と言う. これを成分で書き下すと

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{e}_x + y(u, v)\mathbf{e}_y + z(u, v)\mathbf{e}_z$$

となる.

このとき  $v$  を固定して  $u$  を動かすと  $\mathbf{r}(u, v)$  は 1 つの曲線を描く. これを  $u$ -曲線 と言う. 同様に  $u$  を固定して  $v$  を動かして得られる曲線を  $v$ -曲線という.  $u, v$ -曲線の接線ベクトル  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  はそれぞれ  $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}, \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}$  で与えられる. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $S$  上の各点において  $S$  に垂直なベクトルを法線ベクトルと呼ぶ.  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  が点  $P(u, v)$  における法線ベクトルであることを示せ.
- (2) 近接した 2 本の  $u$ -曲線と近接した 2 本の  $v$ -曲線, 計 4 本の曲線で囲まれた四辺形状の部分を考える.  $P_0 = P(u, v), P_1 = P(u, v + \Delta v), P_2 = P(u + \Delta u, v)$  とすれば, この部分はベクトル  $\overrightarrow{P_0P_1}$  と  $\overrightarrow{P_0P_2}$  の作る平行四辺形で近似される. この部分の面積を  $\Delta S$  とおくと,

$$\Delta S \approx |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \Delta u \Delta v|$$

と近似できることを示せ.

ここから定義される  $dS = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv$  をベクトル面積素, その大きさ  $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$  を面積素と呼ぶ<sup>1</sup>. 面積素を全て足しあげることにより曲面  $S$  の面積が求められる. つまり

$$\int_S dS = \int_S |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

である.

<sup>1</sup>より正確にはベクトル面積素の向きには  $\pm$  の不定性がある. 閉曲面に対しては曲面の外側に向くように符号を定める.

### 5.3 一般化座標

座標  $r$  を直交直線座標  $(x, y, z)$  に代わる 3 つの変数  $(u, v, w)$  で表す場合を考える.  $u, v, w$  はともに  $x, y, z$  の関数である. 例えば円筒座標では変数として  $(r, \phi, z)$  を用い, それぞれ  $x, y, z$  と次の関係にある.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), z = z$$

球座標  $(r, \theta, \phi)$  では

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

である.

- (1) 直交直線座標と円筒座標の幾何学的関係を図示し,  $(x, y, z)$  を  $(r, \phi, z)$  を用いて表せ.
- (2) 直交直線座標と球座標の幾何学的関係を図示し,  $(x, y, z)$  を  $(r, \theta, \phi)$  を用いて表せ.

$u$  曲線とは,  $v, w$  を固定して  $u$  を変化させた時に座標  $r$  が描く軌跡のことを言う. その接ベクトル  $r_u$  は次式で与えられる

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u} e_x + \frac{\partial y}{\partial u} e_y + \frac{\partial z}{\partial u} e_z$$

$v, w$  曲線およびその接ベクトル  $r_v, r_w$  は同様に定義される. これら接ベクトルの方向をそれぞれ  $u, v, w$  方向という.

- (3) 円筒座標において  $r_r, r_\phi, r_z$  を  $r, \phi, z, e_x, e_y, e_z$  を用いて表せ.
- (4) 球座標において  $r_r, r_\theta, r_\phi$  を  $r, \theta, \phi, e_x, e_y, e_z$  を用いて表せ.

$u$  曲線のスケール因子  $h_u$  とは,  $u$  方向接ベクトルの長さ  $|r_u|$  のことを言う. ここから  $u$  方向単位ベクトル  $e_u$  が

$$e_u = \frac{r_u}{h_u} \text{ または } r_u = h_u e_u$$

と定義される.  $v, w$  曲線のスケール因子  $h_v, h_w$ ,  $v, w$  方向単位ベクトル  $e_v, e_w$  も同様に定義される.  $e_u, e_v, e_w$  は一般化座標系  $(u, v, w)$  での基本単位ベクトルである.

- (5) 円筒座標において  $h_r, h_\phi, h_z$  を求めよ.
- (6) 球座標において  $h_r, h_\theta, h_\phi$  を求めよ.

## 5.4 面積素と体積素

一般化座標  $(u_1, u_2, u_3)$  における面積素  $dS_{ij}$  と体積素  $dV$  はそれぞれ

$$dS_{ij} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j du_i du_j$$

$$dV = |\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)| du_1 du_2 du_3$$

であらわされる。ただしここでは和の規約は用いず式の簡略化のため  $r_{u_j} = \mathbf{r}_j$ ,  $h_{u_j} = h_j$  と記す。

- (1) 各点で接ベクトル  $\mathbf{r}_i$  ( $i=1,2,3$ ) が互いに直交している座標系を直交曲線座標という。このとき

$$dS_{ij} = h_i h_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j du_i du_j = \varepsilon_{ijk} h_i h_j \mathbf{e}_k du_i du_j$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

を示せ。ここで  $\mathbf{e}_j$  は  $u_j$  方向基本単位ベクトルをあらわす。和の規約は用いない。

- (2) 円筒座標と球座標は直交曲線座標であることを示せ  
 (3) 円筒座標と球座標における体積素の表式をそれぞれ求めよ。

## 5.5 直交曲線座標における勾配

スカラー場  $\varphi$  の勾配  $\text{grad } \varphi$  はベクトルであり, 直交直線座標系の基本単位ベクトルを用いて

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

と表される. これを直交曲線座標  $(u_1, u_2, u_3)$  で表すには, この直交曲線座標の基本単位ベクトル  $\mathbf{e}_{u_j}$  を用いる. 各成分  $(\text{grad } \varphi)_{u_j}$  は  $\text{grad } \varphi$  を各基本単位ベクトルの方向に射影したものである.

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{e}_{u_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{u_j}$$

となる.

- (1)  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{u_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$  を示せ. この表式では和の規約は用いず, スケール因子は  $h_{u_j} = h_j$  と記すものとする [ヒント: 問題 5.3 の  $\mathbf{e}_{u_j}$  の定義を思い出す].

- (2) 恒等式  $\frac{df(x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi))}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\xi}$  を利用し,

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

を示せ. この表式も和の規約は用いない.

- (3) 円筒座標における勾配は

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

と表されることを示せ.

- (4) 上と同様に球座標における  $\text{grad } \varphi$  の表式を書き下せ.

## 5.6 直交曲線座標における発散

直交曲線座標  $(u_1, u_2, u_3)$  で表されるベクトル場  $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_{u_i}$  の発散の表式について考える. これは発散の定義から丹念に計算しても導けるが面倒である. ここではガウスの定理  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  を使った導出を行う.

- (1) 体積  $V$  として,  $u_i, u_i + \Delta u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 一定の面で囲まれた微小 6 面体を考える. このとき

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \approx \nabla \cdot \mathbf{A} h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

を示せ. ただしスケール因子は  $h_{u_j} = h_j$  と記す.

- (2)

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} \int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3} [A_1 h_2 h_3 du_2 du_3]_{u_1=u_1}^{u_1=u_1+\Delta u_1} \\ &+ \int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3} \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} [A_2 h_3 h_1 du_3 du_1]_{u_2=u_2}^{u_2=u_2+\Delta u_2} \\ &+ \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} [A_3 h_1 h_2 du_1 du_2]_{u_3=u_3}^{u_3=u_3+\Delta u_3} \end{aligned}$$

を示せ. 右辺はさらに

$$\approx \left( \frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right) \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

と近似できることを示せ.

- (1) と (2) の結果を比較すると  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right)$$

と書けることが分かる. これが曲線直交座標系での発散の一般形である.

- (3) 円筒座標における  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  の表式を求めよ.

- (4) 球座標における  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  の表式を求めよ.

## 5.7 直交曲線座標における回転

直交曲線座標  $(u_1, u_2, u_3)$  で表されるベクトル場  $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_{u_i}$  の回転の表式について考える。これは回転の定義から丹念に計算しても導けるが面倒なので、ここではストークスの定理  $\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  を使った導出を行う。

- (1)  $u_3$  が一定の面内で  $u_2, u_2 + \Delta u_2$  一定の 2 本の  $u_1$  曲線と,  $u_1, u_1 + \Delta u_1$  一定の 2 本の  $u_2$  曲線, 計 4 本の曲線で囲まれた内部を面  $S$  にとる。このとき

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx (\nabla \times \mathbf{A})_3 h_1 h_2 \Delta u_1 \Delta u_2$$

を示せ。ここで  $(\nabla \times \mathbf{A})_3$  は  $\nabla \times \mathbf{A}$  の  $u_3$  方向成分を表す。スケール因子は  $h_{u_j} = h_j$  と略記している。

- (2) 線積分を  $(u_1, u_2) \rightarrow (u_1 + \Delta u_1, u_2) \rightarrow (u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2) \rightarrow (u_1, u_2 + \Delta u_2) \rightarrow (u_1, u_2)$  の順に行うことに注意して

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{u_1}^{u_1 + \Delta u_1} [A_1 h_1]_{u_2 = u_2 + \Delta u_2}^{u_2 = u_2} du_1 + \int_{u_2}^{u_2 + \Delta u_2} [A_2 h_2]_{u_1 = u_1}^{u_1 = u_1 + \Delta u_1} du_2$$

を示せ。右辺はさらに

$$\approx \left( \frac{\partial A_2 h_2}{\partial u_1} - \frac{\partial A_1 h_1}{\partial u_2} \right) \Delta u_1 \Delta u_2$$

と近似できることを示せ。

- (1) と (2) を比較すると,

$$(\nabla \times \mathbf{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial A_2 h_2}{\partial u_1} - \frac{\partial A_1 h_1}{\partial u_2} \right)$$

が導かれる。 $\nabla \times \mathbf{A}$  の各  $u_i$  成分の一般的な表式は

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

である。

- (3) 円筒座標における  $\nabla \times \mathbf{A}$  の表式を求めよ。  
 (4) 球座標における  $\nabla \times \mathbf{A}$  の表式を求めよ。

## 5.8 直交曲線座標におけるラプラシアン

- (1) 勾配と発散一般形から直交曲線座標におけるラプラシアン  $\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi)$  の一般形を導け.
- (2) 円筒座標における  $\nabla^2\varphi$  の表式を求めよ.
- (3) 球座標における  $\nabla^2\varphi$  の表式を求めよ.