8.1 指数関数の仲間

$z \in \boldsymbol{C}$ とする. このとき指数関数 e^z, 三角関数 $\cos z, \sin z$ は次の無限級数で定義される. ただし $0! = 1$ とする.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\cos z$ と $\sin z$ を e^{iz}, e^{-iz} を用いて表せ.

(2) $z = e^w$ を満たす w を対数関数といい $w = \log z$ で表す. このとき $\log z$ は無限多価関数であることを示せ.

z の偏角 θ を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲に限った時これを $\log z$ の**主値**と呼び Log$z$ と記す (注: 主値を与える範囲として $-\pi \leq \theta \leq \pi$ をとることもある).

(3) $\cos^{-1} z, \sin^{-1} z$ をそれぞれ対数関数であらわし, 導関数を求めよ.

8.2 正則関数の積分

(1) $f(z)$ を領域 D において正則な関数 ($z \in \boldsymbol{C}$) とする. D 内の 2 点 P, Q を結び, かつ D 内に含まれる任意の 2 つの曲線 C_1, C_2 に沿って点 P から Q まで積分したとき,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つことを示せ.

(2) 互いに交わらない 2 つの閉曲線 C_1, C_2 を考える (ただし C_1 は C_2 の外側にあるとする). C_1, C_2 で囲まれた領域 D 内で正則かつ C_1, C_2 上で連続な関数 $f(z)$ を考える ($z \in \boldsymbol{C}$). このとき,

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = -\oint_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つこと示せ. ただし積分は領域 D を左に見る向きにとる.

(3) (1) より正則な複素関数 $f(z)$ の積分は経路によらない. これより $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

これより任意の複素数 α, β に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dg(z)}{dz}\,dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz}g(z)\,dz$$

を証明せよ.

8.3 コーシーの積分定理

関数 $f(z)$ が領域 D 上で正則で，単純閉曲線 C がその内部も含めてすべて D に 属するものとする．このとき

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{8.1}$$

である．

解説 複素関数の積分 (複素積分) は複素平面上の線積分として定義される．複素平面上に滑らかな曲線 C があるものとし，C の始点 A を z_0，終点 B を z_n とする．C を $n-1$ 個の点で分割する．分割点は A に近い物から順に $z_1, \cdots, z_{n-1}$ とする．

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

として，分割を十分細かくとった時の $f(\zeta_k)\Delta z_k$ (ζ_k は z_k と z_{k-1} の間の C 上の任意の点) の総和を $f(z)$ の複素積分と定義する．式で書けば

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

これは実積分に帰着させることができる．$f = u(x,y) + iv(x,y)$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \{u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + i[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]\}$$

であるから

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \tag{8.2}$$

とあらわされる．

証明 まず 2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_1(x,y)\boldsymbol{i} - A_2(x,y)\boldsymbol{j}$ についてストークスの定理を書き下す．A_2 にはのちの便宜上 − をつけた．C を xy 面上の閉曲線とするとストークスの定理は

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})_3\,dS$$

である．ここで $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$ に注意すると，

$$\oint_C (A_1dx - A_2dy) = -\int_S \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\,dx\,dy$$

となる．ここで $A_1 = u, A_2 =$ とおいて上式に代入し，コーシー・リーマンの関係式を用いると

$$\int_C (udx - vdy) = 0.$$

同様に $A_1 = v, A_2 = -u$ とおくと

$$\int_C (vdx + udy) = 0$$

となることが分かる．従って閉曲線 C に沿って，C 上およびその内部で正則な関数を積分した場合，積分値は 0 になることが示される．

コーシーの積分定理は，正則な複素関数の積分はその経路によらず始点と終点の値のみよって決まると言うことを意味している．これはベクトル解析の言葉でいえば関数の実部と虚部が渦無しのベクトル場を作っていることにあたる．

8.4 さまざまな周回積分

(1) 以下の周回積分を求めよ.

$$\text{(i)}\quad \oint \frac{1}{z-a}\,dz \quad \text{(ii)}\quad \oint \frac{1}{z^2+a^2}\,dz \quad \text{(iii)}\quad \oint \frac{z}{z^2+a^2}\,dz$$

(2) 原点を中心とする半径 r の円周を C とする. C を正の向きに 1 周する周回積分

$$\oint_C e^{iaz}\,dz$$

を求め, これを用いて以下の式を証明せよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\cos(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\sin(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

8.5 導関数の積分公式

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{8.3}$$

が成り立つ.

(1) (8.3) 式を用いて $f(z)$ の一回導関数を求めよ.

(2) (1) の結果を用いて $f(z)$ の n 階導関数が

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \tag{8.4}$$

となることを証明せよ (ヒント: 例えば数学的帰納法を用いる).

(8.4) は**グルサーの公式**と呼ばれる. 形式的には周回積分と微分の順序を交換したような形

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)d\zeta$$

に表すことができる.

(3) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin t$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2+1}\,dz = \cos t$

8.6 コーシーの積分公式

関数 $f(z)$ が閉曲線 C の内部およびその上で正則で，C 内部の任意の点を a とするとき

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{8.5}$$

もし a が C の外にあれば

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

である．

解説 この式は複素解析のもっとも重要な成果といってよい．ここから複素関数のテイラー展開，それを拡張したローラン展開が定義される．種々の積分が簡便に解けるようになるのもこの定理の応用である．

証明 準備として，まず次式を証明しておく．

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z-a}dz = 2\pi i \tag{8.6}$$

但し Γ は複素平面上で a を中心とする半径 ρ の円周である．$z-a=\rho e^{i\theta}$ と変数変換し，$dz = i\rho e^{i\theta}d\theta$ に注意すると，

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta}\, d\theta$$

右辺を整理すると

$$右辺 = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i$$

この値が円周の半径によらないことに注意．

コーシーの積分公式の証明に移ろう．$\dfrac{f(z)}{z-a}$ は点 a を除いて正則である．下図のように特異点を避けた積分路を考えることで，

$$\oint_{C+A-B+A'} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

ここで B は a を反時計周りに回る積分路で，$-$ は逆に回ることを示す．

$$\oint_{C+A-B+A'} = \int_C + \int_{-B} + \int_A + \int_A'$$

$$\int_{-B} = -\int_B, \int_A' = -\int_A$$

であるから，結局

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_B \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

ここで $f(z) = f(z) - f(a) + f(a)$ と置くと，

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_B \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz + f(a)\oint_B \frac{1}{z-a}\,dz$$

右辺第 2 項は $2\pi i f(a)$ に等しい．第 1 項は $f(z)$ の正則性から任意の正実数 ε に対して十分小さな ρ をとれば $|f(z)-f(a)| < \varepsilon$ とでき，

$$\left|\oint_B \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

$$\oint_B |dz| < 2\pi\varepsilon$$

である．ε は限り無く小さくとれるので，第 1 項の寄与は 0 である．従って，式 (3) を得る．a が C の外側の場合，C 内で $f(z)/(z-a)$ は正則だから定理の後半は明らか.

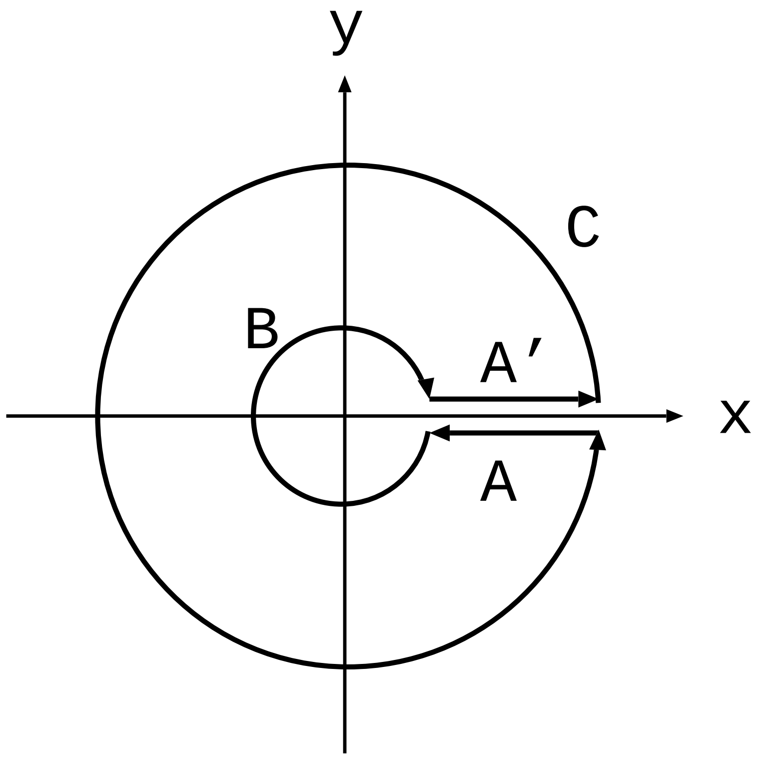

図 8.1: 積分路の取り方. 中心が $z = a$ の点. 便宜上実軸と虚軸の位置をずらしてある.

8.7 コーシーの積分公式の応用

コーシーの積分公式を用いて正則関数について重要な性質が得られる.

リュービルの定理

$|z| < \infty$ で $f(z)$ は正則な関数とする. このとき $|f(z)| < M$ を満たす実数 M が存在するならば, $f(z)$ は定数である.

証明 仮定より $|f(z)| < M$ となる M が存在する. コーシーの積分定理から, 任意の点 z_0 に対し

$$f(z_0) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta}\right)d\zeta = \frac{z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\,d\zeta$$

がなりたつ. ここで積分路 C として原点中心の半径 R の円をとる. z_0 はその内部とする. よって,

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(0)| &= \frac{|z_0|}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\,d\zeta\right| \\ &= \frac{|z_0|}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\theta\right| \\ &< \frac{|z_0|M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|\zeta - z_0|}\,d\theta. \end{aligned}$$

途中で $d\zeta = iRe^{i\theta}\,d\theta$ を用いた.

ここで, $|z_0| < R/2$ となるように R をとると,

$$|\zeta - z_0| \leq |\zeta| - |z_0| = R - z_0 > R/2$$

となる. 以上の 2 つの関係式から,

$$|f(z_0) - f(0)| < \frac{2M|z_0|}{R}$$

となる. $M, |z_0|$ は有限であるから

$$\lim_{R\to\infty} |f(z_0) - f(0)| = 0$$

となる. これは $f(z) = f(0)$ であること, すなわち $f(z)$ は定数であることを示す.

代数学の基本定理

任意の複素定数 $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0$ を係数とする n 次方程式 $(n \leq 1)$

$$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = 0 \quad (\alpha_n =\neq 0)$$

は, 少なくとも 1 つの解を持つ.

証明 これは背理法を用いて証明される. $f(z) = 0$ が解を持たないとする. このときあらゆる z に対し $f(z) \neq 0$ が成り立つ. したがって

$$g(z) \equiv \frac{1}{f(z)}$$

は $|z| < \infty$ で正則かつ有界である. なぜならば $|z| < \infty$ で $f(z)$ は有限 (発散しない) で,

$$\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$$

だからである. したがってリュービルの定理より $g(z)$ は定数でなければならない. すなわち $f(z)$ は定数である. しかしこの結果は $\alpha_n \neq= 0$ とした仮定に矛盾する.

これより $f(z) = 0$ は少なくとも 1 つの解を持つ.

$f(z) = 0$ の 1 つの解を ξ_1 とすると, 多項式 $f(z)$ は

$$f(z) = (z - \xi_1) f_1(z)$$

と表される. ここで新たに現れた $f_1(z)$ についても代数学の基本定理から少なくとも 1 つの解 ξ_2 を持つので, $f(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) f_3(z)$ と表される. これを繰り返すと $f(z)$ は完全に因数分解することができ,

$$f(z) = \alpha_n \Pi_{i=1}^{n} (z - \xi_i)$$

と書ける. したがって $f(z) = 0$ は n 個の解 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ を持つことがわかる.

$f(z)$ が多重根をもつ場合は

$$f(z) = \alpha_n (z - \xi_1)^{n_1} (z - \xi_2)^{n_2} \cdots (z - \xi_k)^{n_k}$$

と表される. ここで n_i は解の多重度を表し, $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i$ である.

複素関数 $f(z)$ が与えられ, $f(z) = 0$ を満たす点 z を $f(z)$ の**零点**と呼ぶ. とくに $z = \xi$ が $f(z) = 0$ の k 重根であるとき, ξ は $f(z)$ の k **位の零点**と呼ぶ.