9.1 特異点

複素関数 $f(z)$ が正則でない点を $f(z)$ の**特異点**という．点 $z = z_0$ では正則でないがその近傍の全ての点では正則な時，$z = z_0$ は**孤立特異点**と呼ばれる．

孤立特異点のなかで最も重要なタイプは**極** (pole) と呼ばれるものである．$f(z)$ が $z = z_0$ 近傍で以下のように書けるとき．**「$f(z)$ は $z = z_0$ で k 位の極を持つ」**という．

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \tag{9.1}$$

ただし $g(z)$ は $z = z_0$ においても正則な関数, k は自然数である．別の表現では

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \tag{9.2}$$

が一意に定まるとき $f(z)$ は $z = z_0$ で k 位の極を持つ．ここで a は 0 でない有限な複素定数である．

(1) 次の関数の特異点を全て見つけ, それぞれ何位の極か調べよ．

$$\text{(i)}\ f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} \qquad \text{(ii)}\ f(z) = \tanh z \qquad \text{(iii)}\ f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

(2) $f(z)$ が $z = z_0$ で $0/0$ の形になることがある．このとき $\lim_{z \to z_0} f(z)$ が $z \to z_0$ の近づけ方によらずに一意に定まるとき, このような孤立特異点を**除きうる特異点**と呼ぶ．

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

は除きうる特異点を持つことを示せ．

(3) 孤立特異点のうち，式 (9.2) を満たす自然数 k が存在せず, しかも除きうる特異点でないものを**真正特異点**という．

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

は原点に真性特異点を持つことを示せ．

9.2 無限遠点とリーマン球面

実関数では正の無限大と負の無限大 ($\pm\infty$) を考えた．複素関数についても同様の概念の導入を試みる．

今 $w = f(z) = 1/z$ という複素関数を考える．$f(z)$ は $z = 0$ に特異点を持つ．z が原点に近付くと w の絶対値は無限に大きくなり，w 平面の原点から次第に遠ざかっていく．偏角の値は z の原点への近付き方に依存するため，z 平面上の原点を含むその近傍領域は w 平面上の無限に広い領域に対応する．

しかし，$w = 1/z$ によって z 平面上の原点以外の点は w 平面上の点に 1 対 1 対応している．原点だけが w 平面上の無数の点に対応しているのは美しくしくない．そこで w 平面上に $\lim_{x\to 0} 1/z$ に対応する 1 点を考え，これを**無限遠点**と呼ぶことにする．無限遠点を含む複素平面を**拡張された複素平面**という．

拡張された複素平面の幾何学的表現として**リーマン球面** (図 9.1) がある．これは複素平面を 3 次元空間の平面と考えた場合に，その原点に接する半径 1/2 の球面である．z 平面上の任意の点 z はその点と z 平面から最も遠い球面上の点 N とを結ぶ直線が球面と交わる点 Z に対応させる．この方法によって z 平面上 $|z| < 1$ の点は球面の下半球上の各点に，$|z| = 1$ の円周上の点は赤道に，$|z| > 1$ の点は球面の上半球上の各点に対応する．z 平面から最も遠い球面上の点 N が無限遠点 $z = \infty$ にあたる．

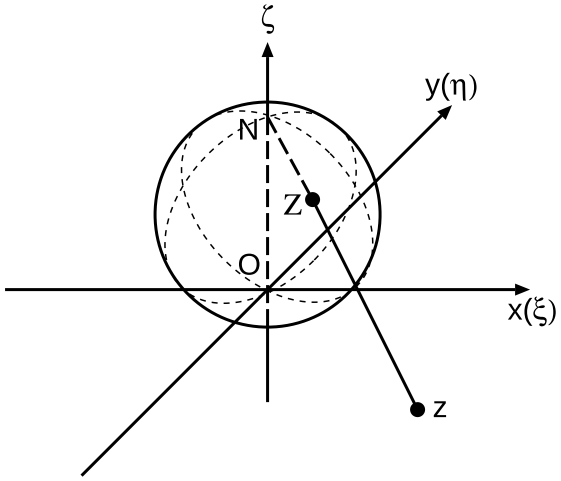

図 9.1: リーマン球面

9.3 テイラー展開

関数 $f(z)$ が点 z_0 を中心とする半径 ρ の円 C で正則であるとする．このとき C 内部の点 z における $f(z)$ の値は, コーシーの積分公式 (9.1) より,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{9.3}$$

と与えられる．この表現から関数 $f(z)$ を z_0 の回りで展開した数式表現を求める．$f(z)$ が正則な関数である場合, これは実関数における**テーラー展開**の複素関数への拡張表現となる．$f(z)$ が正則でない場合の展開は, 後述の**ローラン展開**である．正則関数 $f(z)$ の $z = z_0$ を中心とするテーラー展開は以下のように表される．

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \\ A_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{aligned} \tag{9.4}$$

(1) $z = \zeta$ を C 上の点とする．このとき

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left\{1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

と表されることを確かめよ．さらに右辺の級数が絶対収束することを確かめよ．

(2) (9.3) に (1) の証明の結果を代入することで,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

となることを示せ．

(3) 導関数の積分表示 (グルサーの公式) (10.4) を用いてテイラーの定理が成り立つことを確かめよ．

(4) $f(z)$ が原点において正則である場合の展開表現であるマクローリン展開を求めよ．

9.4 ローラン展開

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に特異点を持つがその近傍の点では正則な場合を考える．このとき $z = a$ の周りでテイラー級数には展開できない．しかしこれを拡張した以下の**ローラン (Laurant) 級数**に展開することができる．

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n \\ A_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{aligned} \tag{9.5}$$

テイラー級数との違いはベキが負の項も含む点である．以下では A_n の形を決定しよう．

(1) $f(z)$ は 円環領域 $R_1 \le |z - z_0| \le R_2$ において正則とする ($R_{1,2} \in \boldsymbol{R}$, $0 < R_1 < R_2$). $C_1 = \{z \,|\, |z - z_0| = R_1\}, C_2 = \{z \,|\, |z - z_0| = R_2\}$ とするとき

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta$$

を示せ.

(2) 収束性に注意して

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n$$

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right)^n$$

を示せ.

(3) n の正負に関わらず

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$$

が成り立つことを示せ．ここで C は C_1 と C_2 との間に任意に描いた同心円である.

式 (9.5) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - z_0)^n$ と書いたとき, 負ベキ項からなる右辺の第 1 の級数を**主要部**, 第 2 の級数を**解析部**という．A_{-1} は特別な性格を持つことから**留数**と呼ばれる．$z = z_0$ が $f(z)$ の p 位の極であるとき $n < -p$ の A_n は全て 0 となり主要部は有限項で表わされる．$z = z_0$ が真性特異点のときは主要部は無限級数となる.

9.5 関数展開の具体例 (1)

次の関数を括弧内の点を中心としてテイラー展開せよ.

(1) $\dfrac{z+2}{(z-2)z} \quad [z=1]$

(2) $\dfrac{1}{z^2} \quad [z=1]$

(3) $\cos z \quad [z=\pi/4]$

(4) $\sinh z \quad [z=\pi]$

9.6 関数展開の具体例 (2)

次のローラン展開の主要部を求めよ.

(1) 領域 $|z-i|<2$ で $\dfrac{1}{z^2+1}$ の $z=i$ を中心とする展開.

(2) 領域 $\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<\pi$ で, $\tan z$ の $z=\pi/2$ を中心とする展開.