

解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

- (1) ド・モアブルの公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が成り立つことを示せ.

- (2) z を複素数とするとき, $z^3 = -1$ の根を全て求め, それを複素平面上に図示せよ.
- (3) $w = \ln z$ の分枝を求めよ.

問題 2

z を複素数とするとき以下の周回積分を求めよ.

$$(1) \oint_C \frac{1}{z-a} dz$$

ただし a は複素数, 積分路 C はその内部に $z = a$ を含む閉曲線とする.

$$(2) \oint_C \frac{1}{z^2 + a^2} dz$$

ただし a は実数, 積分路 C は $z = ia$ をその内部に含む閉曲線とする.

$$(3) \oint_C \frac{z}{z^2 + a^2} dz$$

ただし a は実数, 積分路 C は $z = -ia$ をその内部に含む閉曲線とする.

問題 3

次の関数の極とその位数, その極における留数を求めよ.

$$(1) \frac{z^3 + 5}{z(z-1)^3}$$

$$(2) \frac{\cos z}{z^3}$$

$$(3) \frac{1}{\sin z}$$

問題 4

複素積分を利用して以下の積分を求めよ. ただし a, b は実数とする.

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} \quad (a > b)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + a^4} dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x - ib} dx \quad (a, b > 0)$$