解答上の注意

1. 問題用紙 3 枚, 答案用紙 4 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla\times(\varphi\nabla\varphi) = 0$

(2) $\nabla\cdot(\nabla\varphi\times\nabla\psi) = 0$

(3) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

問題 2

原点に置かれた質量 M による単位質量当たりの重力 $\boldsymbol{F}$ は, $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとして,

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

と与えられる. このとき,

(1) このような中心力場の中で運動する物体について, $\boldsymbol{r}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は時間によらず一定であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{F}$ のスカラーポテンシャル φ を求めよ.

問題 3

極座標系 (r, θ, ϕ) について以下の問に答えよ.

(1) (x, y, z) を (r, θ, ϕ) を用いて表せ.

(2) スケール因子 h_r, h_θ, h_ϕ を求めよ.

(3) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるスカラー φ の勾配は

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_j は u_j 成分であることを示す. これを用いて球座標系における φ の勾配の各成分を表せ.

(4) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3}\right)$$

と表される. これを用いて球座標系における $\boldsymbol{A}$ の発散を表わせ.

(5) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転は

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_{u_i} = \varepsilon_{ijk}\frac{1}{h_j h_k}\frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_i は u_i 成分であることを示す. これを用いて球座標系における $\boldsymbol{A}$ の回転の各成分を表せ.

(6) 上記の (3), (4) の結果を利用し, 球座標系における

$$\nabla^2 \varphi$$

の表式を求めよ.

問題 4

(1) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱 $\boldsymbol{q}$ (J/m^{2}sec) は

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T$$

と表される. ここで k は熱伝導率である. このような熱輸送過程を熱伝導と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

で表されることを示せ. ここで κ は熱拡散率で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c_p を用いて $\kappa = k/\rho c_p$ と表される.

(2) 閉曲線 C に沿って発生する電場を $\boldsymbol{E}$ とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

である. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. $\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ であることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

を求めよ. ここで $\boldsymbol{B}$ は磁束密度である.