12.1 コーシーの積分公式 (1)

(1) 次の積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とし内部に $z = \pi/2$ を含む円を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z}\, dz$

ii) $\displaystyle\oint_C \frac{1-\cos z}{z}\, dz$

iii) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z(z-\pi)/2}\, dz$

iv) $\displaystyle\oint_C \frac{1-\cos z}{z(z-\pi/2)}\, dz$

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ に対し積分 $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z}\, dz$ を求めよ. ただし積分路 C は原点と $f(z)$ の全ての特異点を含む閉曲線を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z^2-1}$

ii) $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$

iii) $f(z) = \dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$

iv) $f(z) = \dfrac{1}{e^{2\pi i z}+1} \quad (|z| < 1/2)$

12.2 コーシーの積分公式 (2)

複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$$

を考える. ここで a, b は実定数で $a > 0, b > 0$ とする.

(1) 図 12.1 の積分路 C, C_+ について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_+} f(z)\,dz = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

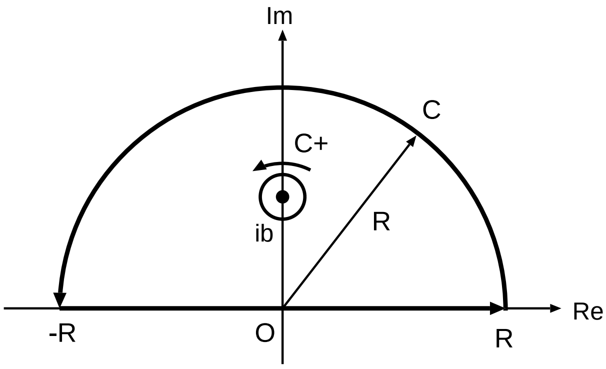

図 12.1: 積分路 C と C_+

(2) 図 12.1 の積分路を実軸について対称の位置に変換して得られる積分路 C', C_- (図 12.2) について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_-} f(z)\,dz = \frac{e^{ab}}{2ib}$$

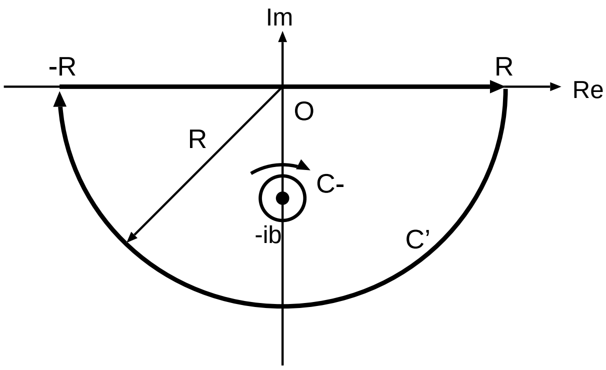

図 12.2: 積分路 C' と C_-

12.3 導関数の積分公式

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{12.1}$$

が成り立つ.

(1) (12.1) 式を用いて $f(z)$ の一回導関数を求めよ.

(2) (1) の結果を用いて $f(z)$ の n 階導関数が

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \tag{12.2}$$

となることを証明せよ (ヒント: 例えば数学的帰納法を用いる).

(12.2) は**グルサーの公式**と呼ばれる. 形式的には周回積分と微分の順序を交換したような形

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)d\zeta$$

に表すことができる.

(3) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin t$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2+1}\,dz = \cos t$

12.4 コーシーの積分公式の応用

コーシーの積分公式を用いて正則関数について重要な性質が得られる.

リュービルの定理

$|z| < \infty$ で $f(z)$ は正則な関数とする. このとき $|f(z)| < M$ を満たす実数 M が存在するならば, $f(z)$ は定数である.

証明 仮定より $|f(z)| < M$ となる M が存在する. コーシーの積分定理から, 任意の点 z_0 に対し

$$f(z_0) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = \frac{z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\, d\zeta$$

がなりたつ. ここで積分路 C として原点中心の半径 R の円をとる. z_0 はその内部とする. よって,

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(0)| &= \frac{|z_0|}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\, d\zeta\right| \\ &= \frac{|z_0|}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\theta\right| \\ &< \frac{|z_0|M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|\zeta - z_0|}\, d\theta. \end{aligned}$$

途中で $d\zeta = iRe^{i\theta}\, d\theta$ を用いた.

ここで, $|z_0| < R/2$ となるように R をとると,

$$|\zeta - z_0| \leq |\zeta| - |z_0| = R - z_0 > R/2$$

となる. 以上の 2 つの関係式から,

$$|f(z_0) - f(0)| < \frac{2M|z_0|}{R}$$

となる. $M, |z_0|$ は有限であるから

$$\lim_{R\to\infty} |f(z_0) - f(0)| = 0$$

となる. これは $f(z) = f(0)$ であること, すなわち $f(z)$ は定数であることを示す.

代数学の基本定理

任意の複素定数 $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0$ を係数とする n 次方程式 $(n \leq 1)$

$$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = 0 \quad (\alpha_n = \neq 0)$$

は, 少なくとも 1 つの解を持つ.

証明 これは背理法を用いて証明される. $f(z) = 0$ が解を持たないとする. このときあらゆる z に対し $f(z) \neq 0$ が成り立つ. したがって

$$g(z) \equiv \frac{1}{f(z)}$$

は $|z| < \infty$ で正則かつ有界である. なぜならば $|z| < \infty$ で $f(z)$ は有限 (発散しない) で,

$$\lim_{|z| \to \infty} g(z) = 0$$

だからである. したがってリュービルの定理より $g(z)$ は定数でなければならない. すなわち $f(z)$ は定数である. しかしこの結果は $\alpha_n \neq = 0$ とした仮定に矛盾する.

これより $f(z) = 0$ は少なくとも 1 つの解を持つ.

$f(z) = 0$ の 1 つの解を ξ_1 とすると, 多項式 $f(z)$ は

$$f(z) = (z - \xi_1) f_1(z)$$

と表される. ここで新たに現れた $f_1(z)$ についても代数学の基本定理から少なくとも 1 つの解 ξ_2 を持つので, $f(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) f_3(z)$ と表される. これを繰り返すと $f(z)$ は完全に因数分解することができ,

$$f(z) = \alpha_n \Pi_{i=1}^{n} (z - \xi_i)$$

と書ける. したがって $f(z) = 0$ は n 個の解 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ を持つことがわかる.

$f(z)$ が多重根をもつ場合は

$$f(z) = \alpha_n (z - \xi_1)^{n_1} (z - \xi_2)^{n_2} \cdots (z - \xi_k)^{n_k}$$

と表される. ここで n_i は解の多重度を表し, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ である.

複素関数 $f(z)$ が与えられ, $f(z) = 0$ を満たす点 z を $f(z)$ の**零点**と呼ぶ. とくに $z = \xi$ が $f(z) = 0$ の k 重根であるとき, ξ は $f(z)$ の k **位の零点**と呼ぶ.

最大値および最小値の定理

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C 上およびその内部で正則, かつ定数でないとすると, $|f(z)|$ は C の内部で最大値をとることはない.
また C の内部で $f(z) \neq 0$ ならば, $|f(z)|$ は C の内部で最小値をとらない.

証明 背理法を用いて証明する. C 内の点 z_0 で $|f(z)|$ が最大値を持つとする. 正則性より $f(z)$ は連続であるから z_0 を中心とする微小半径 ε の円周上 Γ において

$$|f(z+\varepsilon e^{i\theta})| < |f(z_0)|$$

が成り立つ. 一方でコーシーの積分公式より,

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})|\,d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ. 仮定より,

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,d\theta \\
&= |f(z_0)|
\end{aligned}$$

となる. これは矛盾した結果であるので, C 内の点 z_0 で $|f(z)|$ が最大値を持つという仮定に誤りがあることを示している. これより定理の前半は証明される.

後半も同様に証明する. C 内の点 z_0 で $|f(z)|$ が最小値を持つとする. $f(z) \neq 0$ より,

$$\left|\frac{1}{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}\right| < \left|\frac{1}{f(z_0)}\right|$$

が成り立つ. 一方でコーシーの積分公式より,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(z_0)}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{1/f(z)}{z-z_0}\,dz\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}\,d\theta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}\right|\,d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ. 仮定より,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{f(z_0)}\right| &< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{f(z_0)}\right| d\theta \\ &= \left|\frac{1}{f(z_0)}\right|\end{aligned}$$

となる. これは矛盾した結果であるので, C 内の点 z_0 で $|f(z)|$ が最小値を持つという仮定に誤りがあることを示している.