## 14.1 複素数の巾級数

以下の各問いに答えよ.

(1) 次の巾級数の収束半径を求めよ.

(i) $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

(ii) $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n$ ($a$ は定数)

(iii) $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}$

(iv) $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

(v) $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(2) 数列 $a_n$ を以下の漸化式で定義する.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n \geq 2)$$

(i) $a_n$ の具体的な表現を求めよ.

(ii) 級数 $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を求め, 収束円の内部でこの級数によって与えられる関数を求めよ.

## 14.2 テーラー展開

以下の関数の指定された点の周りでのテーラー展開を求めよ.

(1) $f(z) = e^z \quad (z = i\pi)$

(2) $f(z) = \sin z \quad (z = \pi/4)$

(3) $f(z) = \cos z \quad (z = \pi/2)$

(4) $f(z) = \dfrac{1}{z} \quad (z = 1)$

(5) $f(z) = \dfrac{1}{1-z} \quad (z = 2)$

## 14.3 ローラン展開

以下のそれぞれの関数 $f(z)$ について, $z = 0$ のまわりでローラン展開を行い, その収束半径を求めよ. また, ローラン展開の結果から $z = 0$ における特異性について調べよ.

(1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$

(3) $f(z) = z^m e^{1/z}$ ($m$ は整数)

## 付録: 級数の収束に関する補足

ここでは収束半径の導出に必要な諸定理について若干復習する.

まず級数の収束に関する言葉の整理を行う.

**級数の収束** 無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{14.1}$$

が与えられた場合, 任意の正数 $\varepsilon$ に対しある自然数 $N$ をとると $n \geq N$ を満たす全ての $n$ について

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha \right| < \varepsilon \tag{14.2}$$

となる場合, この無限級数 $\alpha$ に**収束する**と言う. このような収束の定義は級数だけでなく数学の広い範囲において用いられる.

**絶対収束** 級数 (14.1) が与えられた場合, その各項の絶対値の和からなる級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \tag{14.3}$$

が収束する場合, 級数 (14.1) は**絶対収束する**という.

**一様収束** これは関数から構成される数列 (関数列) $\{f_n(x)\}$ についての収束の概念を表している. 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束するとは, (14.2) と同様に任意の正数 $\varepsilon$ に対しある自然数 $N$ をとると $n \geq N$ を満たす全ての $n$ について

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{14.4}$$

が成り立つことを指す. さらに $\varepsilon, N$ の取り方が $x$ に依存せず (14.4) が成り立つ場合, 関数列 $f_n(x)$ は $f(x)$ に**一様収束する**という.

一様収束の概念は関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)$ に対しても用いられる.

## 定理 1: コーシーの判定条件

数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は, 任意の正数 $\varepsilon$ に対してある自然数 $N$ をとると,

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad (n, m \geq N) \tag{14.5}$$

が成り立つことである.

**解説** 数列, 級数の収束を議論するために必要な最も基本的な定理である. このような条件を満たす数列を**基本列**または**コーシー列**と呼ぶ.

この定理の結果を用いると級数に対するコーシーの判定条件を導くことができる. すなわち無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は, $\{a_n\}$ の $n, m$ 項部分和をそれぞれ $S_n, S_m$ とすると, 任意の正数 $\varepsilon$ に対してある自然数 $N$ をとると,

$$|S_m - S_n| < \varepsilon \quad (m > n > N) \tag{14.6}$$

が成り立つことである.

**証明** まずは必要性の証明を行う. $\{a_n\}$ が $\alpha$ に収束するとする. このときある自然数 $N$ をとると $n \geq N$ な $n$ に対し $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ となる. よって $n, m \geq N$ に対して

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) + (\alpha - a_n)| \leq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つ.

次に十分性の証明. (14.5) が成り立つとする. ここで $\varepsilon = 1$ とおくと,

$$|a_m - a_n| < 1 \quad (n, m \geq N).$$

これは以下のように書き換えても差し支えない.

$$|a_N - a_n| < 1 \quad (n \geq N).$$

これより $\{a_n\}$ の部分数列 $\{a_n | n \geq N\}$ は有界 (ある上限値が存在する) である. **ボルツァノ・ワイエルストラスの定理**から有界な数列は収束するので, その収束値を $\alpha$ とする.

ここで一度 (14.5) に戻る. $N = N_1$ として

$$|a_m - a_n| < \varepsilon/2 \quad (n, m \geq N_1)$$

が成り立つ. 部分数列 $\{a_n | n \geq N\}$ に含まれる $a_k$ を取り出すと

$$|a_k - \alpha| < \varepsilon/2 \quad (k \geq N_1)$$

も成り立つ. 上記の 2 つの式から全ての $m \geq N_1$ に対して

$$|a_m - \alpha| < |\, a_m - a_k| + |a_k - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となる.

## 定理 2: 正項級数の収束判定法; 比較判定法

$a_n, b_n > 0$ とする. $n \geq N$ である $n$ に対し $a_n$ が対応する $b_n$ を超えないとする. このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する. 逆に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する.

**解説** 各項が正数である級数を正項級数と呼ぶ. 正項級数の収束発散の判定は, 他の簡単な級数, とくに等比級数と比較することがある. 上記の定理はそのための基本的な定理である.

この定理は $a_n, b_n > 0$, $n \geq N$ である $n$ と正定数 $K$ に対し $a_n \leq Kb_n$ である場合にも成り立つ. 証明方法の手順は全く同じで, $\sum b_n$ が収束する場合には $\sum Kb_n$ も収束するという級数の性質を利用する.

**証明** まず $\sum b_n$ が収束すると仮定する. 級数は有限個の要素を取り除いても収束発散の性質は変化しない. そこで $\{a_n\}$ から初めの有限個 ($N$ 個) を除いて考えると, 全ての $n$ について $a_n < b_n$ が成り立つことになる. このときの $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初めの $n$ 項の和をそれぞれ $s_n, \sigma_n$ とすると,

$$s_n \leq \sigma_n$$

である. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma = \sum b_n$ は収束するので, その値を $\sigma$ とすると,

$$s_n \leq \sigma$$

が成り立つ. これより $\sum a_n$ の収束が証明される.

同様の手順で逆の場合も証明される.

## 定理 3: 正項級数の収束判定法; 級数との比較

正項級数と等比級数と比較することで, その収束判定を簡単に行うことができる.

**コーシーの収束判定法** 正項級数 $\sum a_n$ について以下の極限値

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

が存在するとき

(1) $0 \le r < 1$ ならば収束.

(2) $1 < r \le \infty$ ならば発散.

**証明** $r < 1$ の場合を考える. このとき $r < \rho < 1$ なる $\rho$ を用意する. 十分大きな $n$ に対して $\sqrt[n]{a_n} < \rho$, すなわち $a_n < \rho^n$ が成り立つ. この関係は全ての $n$ について成り立つとしても一般性は失われない. $\sum \rho^n$ は公比が 1 以下の等比数列の和なので収束する. したがって, [定理 2] の結果から $\sum a_n$ は収束する.

$r > 1$ の場合を考える. このとき十分大きな $n$ に対して $\sqrt[n]{a_n} > 1$, すなわち $a_n > 1$ が成り立つ. このとき級数 $\sum a_n$ は一般項が 0 に近付かないため収束しない (これはコーシーの判定条件 (14.6) から導かれる).

**ダランベールの収束判定法** 正項級数 $\sum a_n$ について以下の極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

が存在するとき

(1) $0 \le r < 1$ ならば収束.

(2) $1 < r \le \infty$ ならば発散.

**証明** $r < 1$ の場合を考える. このとき $r < \rho < 1$ なる $\rho$ を用意する. 十分大きな $n$ に対して $a_{n+1}/a_n < \rho$ が成り立つ. これが $n > N$ について成り立つとすると,

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N \le a_N \rho^{n-N}$$

となる. よって $a_n \le (a_N \rho^{-N})\rho^n$. この関係は全ての $n$ について成り立つとしても一般性は失われない. $\sum \rho^n$ は収束するので [定理 2] の結果から $\sum a_n$ は収束する.

$r > 1$ の場合. このとき十分大きな $n$ に対して $a_{n+1}/a_n > 1$ が成り立つ. よってある $N$ より大きな $n$ では $a_n < a_{n+1} < a_{n+1} < \cdots$ となり級数 $\sum a_n$ は一般項が 0 に近付かない. したがって $\sum a_n$ は収束しない.

## 定理 4: 絶対収束

絶対収束級数, すなわち任意の正数 $\varepsilon$ に対しある自然数 $N$ をとると $n \geq N$ を満たす全ての $n$ について

$$\left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \alpha\right| < \varepsilon \tag{14.7}$$

が成り立つ場合, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

**解説** これは級数の収束判定時に非常に強力な道具となる. 級数の収束を議論する場合に, その各項の絶対値からなる級数の収束を議論すればよいからである. この絶対値級数は正項級数なので, その収束判定は前出のコーシーの判定条件, ダランベールの判定条件を用いて行うことができる.

なお $\sum a_n$ が収束しても $\sum |a_n|$ は収束する場合もあるし発散する場合もある. $\sum a_n$ が収束して $\sum |a_n|$ が発散するとき $\sum a_n$ は**条件収束する**という.

**証明** $n \leq m$ である自然数に対し

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots |a_m|$$

が成り立つ. これは $n = 1$ としても一般性を失わない. これより

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つ. したがって $\sum a_n$ は収束する.