## 3.1 運動の法則

ニュートンの運動の三法則は

- 外力を与えられない質点の運動量は時間変化しない (**慣性の法則**)
- 質点の運動量の時間変化は, 与えられた力の大きさに比例し力の方向に作用する (**運動の法則**)
- 質点 A が別の質点 B に力を及ぼすとき, 質点 A は質点 B から同じ大きさで向きが反対の力を受ける (**作用反作用の法則**)

である. 質点の質量と速度をそれぞれ $m$, $\boldsymbol{v}$, 質点に与えられる外力を $\boldsymbol{F}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 上記の慣性の法則と運動の法則を式で表せ.

(2) 力 $\boldsymbol{F}$ が時刻 $t_0$ から $t_1$ まで作用したとする. このとき,

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\,dt$$

をその間における力 $\boldsymbol{F}$ の**力積**という. このとき

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\,dt = m(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)$$

と表されることを示せ. ここで $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1$ はそれぞれ時刻 $t_0, t_1$ における速度である.

(3) 定点 O に対する質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とするとき, 質点の運動量のモーメント (**角運動量**) $\boldsymbol{L}$ は以下のように定義される.

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}.$$

$\boldsymbol{L}$ の時間変化は

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

と表されることを示せ.

(4) 質点の**運動エネルギー** $T$ は以下のように定義される.

$$T(t) \equiv \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}(t)^2.$$

時刻 $t_0, t_1$ における運動エネルギーをそれぞれ $T_0, T_1$ とすると,

$$T_1 - T_0 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\,dt$$

となることを示せ.

## 3.2 中心力場の運動

ある点 (たとえば原点) からの距離のみによって決まる力を中心力と呼ぶ. 中心力 $\boldsymbol{F}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて一般に

$$\boldsymbol{F} = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表される. ここで $f(r)$ は $r$ のみによって決まる関数である.
このとき中心力の場の中で運動する物体について, 面積速度

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

は時間によらす一定であることを示せ.

## 3.3 質点系の運動

$n$ 個の質点からなる系を考え, 各質点の質量を $m_i(i = 1\cdots, n)$ とする.

(1) 質点系の運動量 $\boldsymbol{P}$ は各質点の運動量のベクトル和であるとすると,

$$\boldsymbol{P} = m\overline{\boldsymbol{v}}$$

と表されることを示せ. ここで $m$ は質点系の質量の総和, $\overline{\boldsymbol{v}}$ は重心の速度ベクトルである.

(2) 各質点に作用する力を $\boldsymbol{F}_i(i = 1\cdots, n)$ とする. 重心の加速度を $\overline{\boldsymbol{a}}$ とすると,

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\bar{a}$$

となることを示せ.

質点の間に互いに作用する力は大きさが等しく反対方向であることから, $\sum_i \boldsymbol{F}_i$ を考える際には質点系に働く外力だけを考えればよいことになる.

## 3.4 放物運動

鉛直方向下向きに大きさ $g$ の加速度が働く場における質量 $m$ の質点の運動を考える. 鉛直方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{k}$, 質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, 速度を $\boldsymbol{v}$ とする. このとき質点の運動方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -g\boldsymbol{k}$$

と表される.

(1) 時刻 $t = 0$ での速度を $\boldsymbol{v}_0$ とするとき, 上記の運動方程式を積分して質点の速度を求めよ.

(2) 時刻 $t = 0$ での位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = 0$ とする. このとき (1) で求めた速度の式を積分し, 位置ベクトルを時間の関数として表せ. さらに位置ベクトルの式から, 質点の運動の軌跡が放物線であることを示せ.

(3) 質点には速度に比例する抵抗力が働くとする. このとき質点の運動方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -g\boldsymbol{k} - \alpha\boldsymbol{v}$$

となる. ここで $\alpha$ は定数で $\alpha > 0$ である. 上記の運動方程式を積分して質点の速度 $\boldsymbol{v}$ を求め, $t \to \infty$ における質点の速度がどうなるか説明せよ.

## 3.5 回転系の運動方程式

静止している直交座標系に対し, 第 3 軸を軸として一定の角速度 $\omega$ で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ.

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転する座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とする. このとき

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ. だたし $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \\ \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} &= \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}').\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d'x'}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'y'}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'z'}{dt}\boldsymbol{e}'_3, \\ \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d'^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3\end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

を回転系の表現に変換せよ.