

6.1 一般化座標

座標 r を直交直線座標 (x, y, z) に代わる 3 つの変数 (u, v, w) で表す場合を考える. u, v, w はともに x, y, z の関数である. 例えば円筒座標では変数として (r, ϕ, z) を用い, それぞれ x, y, z と次の関係にある.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), z = z$$

球座標 (r, θ, ϕ) では

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

である.

- (1) 直交直線座標と円筒座標の幾何学的関係を図示し, (x, y, z) を (r, ϕ, z) を用いて表せ.
- (2) 直交直線座標と球座標の幾何学的関係を図示し, (x, y, z) を (r, θ, ϕ) を用いて表せ.

u 曲線とは, v, w を固定して u を変化させた時に座標 r が描く軌跡のことを言う. その接ベクトル r_u は次式で与えられる

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u} e_x + \frac{\partial y}{\partial u} e_y + \frac{\partial z}{\partial u} e_z$$

v, w 曲線およびその接ベクトル r_v, r_w は同様に定義される. これら接ベクトルの方向をそれぞれ u, v, w 方向という.

- (3) 円筒座標において r_r, r_ϕ, r_z を $r, \phi, z, e_x, e_y, e_z$ を用いて表せ.
- (4) 球座標において r_r, r_θ, r_ϕ を $r, \theta, \phi, e_x, e_y, e_z$ を用いて表せ.

u 曲線のスケール因子 h_u とは, u 方向接ベクトルの長さ $|r_u|$ のことを言う. ここから u 方向単位ベクトル e_u が

$$e_u = \frac{r_u}{h_u} \text{ または } r_u = h_u e_u$$

と定義される. v, w 曲線のスケール因子 h_v, h_w , v, w 方向単位ベクトル e_v, e_w も同様に定義される. e_u, e_v, e_w は一般化座標系 (u, v, w) での基本単位ベクトルである.

- (5) 円筒座標において h_r, h_ϕ, h_z を求めよ.
- (6) 球座標において h_r, h_θ, h_ϕ を求めよ.

6.2 面積素と体積素

一般化座標 (u_1, u_2, u_3) における面積素 dS_{ij} と体積素 dV はそれぞれ

$$dS_{ij} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j du_i du_j$$

$$dV = |\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)| du_1 du_2 du_3$$

であらわされる。ただしここでは和の規約は用いず式の簡略化のため $r_{u_j} = \mathbf{r}_j$, $h_{u_j} = h_j$ と記す。

- (1) 各点で接ベクトル \mathbf{r}_i ($i=1,2,3$) が互いに直交している座標系を直交曲線座標という。このとき

$$dS_{ij} = h_i h_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j du_i du_j = \varepsilon_{ijk} h_i h_j \mathbf{e}_k du_i du_j$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

を示せ。ここで \mathbf{e}_j は u_j 方向基本単位ベクトルをあらわす。和の規約は用いない。

- (2) 円筒座標と球座標は直交曲線座標であることを示せ
 (3) 円筒座標と球座標における体積素の表式をそれぞれ求めよ。

6.3 直交曲線座標における勾配

スカラー場 φ の勾配 $\text{grad } \varphi$ はベクトルであり，直交直線座標系の基本単位ベクトルを用いて

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

と表される. これを直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表すには，この直交曲線座標の基本単位ベクトル \mathbf{e}_{u_j} を用いる. 各成分 $(\text{grad } \varphi)_{u_j}$ は $\text{grad } \varphi$ を各基本単位ベクトルの方向に射影したものである

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{e}_{u_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{u_j}$$

となる.

- (1) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{u_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$ を示せ. この表式では和の規約は用いず，スケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と記すものとする [ヒント：問題 6.1 の \mathbf{e}_{u_j} の定義を思い出す].

- (2) 恒等式 $\frac{df(x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi))}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\xi}$ を利用し，

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

を示せ. この表式も和の規約は用いない.

- (3) 円筒座標における勾配は

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

と表されることを示せ.

- (4) 上と同様に球座標における $\text{grad } \varphi$ の表式を書き下せ.

6.4 直交曲線座標における発散

直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表されるベクトル場 $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_{u_i}$ の発散の表式について考える. これは発散の定義から丹念に計算しても導けるが面倒である. ここではガウスの定理 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ を使った導出を行う.

- (1) 体積 V として, $u_i, u_i + \Delta u_i$ ($i = 1, 2, 3$) 一定の面で囲まれた微小 6 面体を考える. このとき

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \approx \nabla \cdot \mathbf{A} h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

を示せ. ただしスケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と記す.

- (2)

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} \int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3} [A_1 h_2 h_3 du_2 du_3]_{u_1=u_1}^{u_1=u_1+\Delta u_1} \\ &+ \int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3} \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} [A_2 h_3 h_1 du_3 du_1]_{u_2=u_2}^{u_2=u_2+\Delta u_2} \\ &+ \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} [A_3 h_1 h_2 du_1 du_2]_{u_3=u_3}^{u_3=u_3+\Delta u_3} \end{aligned}$$

を示せ. 右辺はさらに

$$\approx \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right) \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

と近似できることを示せ.

- (1) と (2) の結果を比較すると $\nabla \cdot \mathbf{A}$ は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right)$$

と書けることが分かる. これが曲線直交座標系での発散の一般形である.

- (3) 円筒座標における $\nabla \cdot \mathbf{A}$ の表式を求めよ.

- (4) 球座標における $\nabla \cdot \mathbf{A}$ の表式を求めよ.

6.5 直交曲線座標における回転

直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表されるベクトル場 $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_{u_i}$ の回転の表式について考える。これは回転の定義から丹念に計算しても導けるが面倒なので、ここではストークスの定理 $\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を使った導出を行う。

- (1) u_3 が一定の面内で $u_2, u_2 + \Delta u_2$ 一定の 2 本の u_1 曲線と、 $u_1, u_1 + \Delta u_1$ 一定の 2 本の u_2 曲線、計 4 本の曲線で囲まれた内部を面 S にとる。このとき

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx (\nabla \times \mathbf{A})_3 h_1 h_2 \Delta u_1 \Delta u_2$$

を示せ。ここで $(\nabla \times \mathbf{A})_3$ は $\nabla \times \mathbf{A}$ の u_3 方向成分を表す。スケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と略記している。

- (2) 線積分を $(u_1, u_2) \rightarrow (u_1 + \Delta u_1, u_2) \rightarrow (u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2) \rightarrow (u_1, u_2 + \Delta u_2) \rightarrow (u_1, u_2)$ の順に行うことに注意して

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{u_1}^{u_1 + \Delta u_1} [A_1 h_1]_{u_2 = u_2 + \Delta u_2}^{u_2 = u_2} du_1 + \int_{u_2}^{u_2 + \Delta u_2} [A_2 h_2]_{u_1 = u_1}^{u_1 = u_1 + \Delta u_1} du_2$$

を示せ。右辺はさらに

$$\approx \left(\frac{\partial A_2 h_2}{\partial u_1} - \frac{\partial A_1 h_1}{\partial u_2} \right) \Delta u_1 \Delta u_2$$

と近似できることを示せ。

- (1) と (2) を比較すると、

$$(\nabla \times \mathbf{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial A_2 h_2}{\partial u_1} - \frac{\partial A_1 h_1}{\partial u_2} \right)$$

が導かれる。 $\nabla \times \mathbf{A}$ の各 u_i 成分の一般的な表式は

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

である。

- (3) 円筒座標における $\nabla \times \mathbf{A}$ の表式を求めよ。
 (4) 球座標における $\nabla \times \mathbf{A}$ の表式を求めよ。

6.6 直交曲線座標におけるラプラシアン

- (1) 勾配と発散一般形から直交曲線座標におけるラプラシアン $\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi)$ の一般形を導け.
- (2) 円筒座標における $\nabla^2\varphi$ の表式を求めよ.
- (3) 球座標における $\nabla^2\varphi$ の表式を求めよ.