8.1 複素数の関数

w, z を複素数とする. $w = z^2 + \alpha z$ (α は定数で $\alpha \neq 0$) と表されるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 $z = \alpha$ を通り, 虚軸に平行な直前 Γ_1 に沿って z が動くとき, w 平面上で w の描く軌跡を図示せよ.

(2) 点 $z = \alpha$ を通り, 実軸に平行な直前 Γ_2 に沿って z が動くとき, w 平面上で w の描く軌跡を図示せよ.

(3) 点 z が z 平面上で直線 $\Gamma_3; z = (1+i)t$ ($-\infty < t < \infty$, t は実数) に沿って z が動くとき, w 平面上で w の描く軌跡を図示せよ.

8.2 複素関数の極限と連続性

領域 D で定義された複素関数 $w = f(z)$ を考える. z が D 内を移動してある点 z_0 に近付くとき, w が w 平面内の点 w_0 に近付く場合, $f(z)$ は $z = z_0$ で**極限値** w_0 **を持つ**という. 数式では

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{8.1}$$

と表す. このとき z_0 **にどの方向から近付いても** w **は** w_0 **に近付く** (すなわち偏角によらない) ことが必要である.

複素関数 $w = f(z)$ が次の 3 つの条件 [1] $z = z_0$ で $f(z_0)$ が存在する, [2] $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ が存在する, [3] $w_0 = f(z_0)$ が成り立つ, を同時に満たすとき, $f(z)$ は $z = z_0$ で**連続**であるという

(1) 次の関数 $f(z)$ の極限値を求めよ. ただし α は定数とする.

(i) $f(z) = (z^3 - 3\alpha^3) + 3z - \alpha \quad (z \to \alpha)$

(ii) $f(z) = \dfrac{z^3 - i\alpha}{z + \alpha} \quad (z \to i)$

(iii) $f(z) = \overline{z} \quad (z \to 0)$

(iv) $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}} \quad (z \to 0)$

(2) 次の関数 $f(z)$ の $z = 0$ における連続性を調べよ.

(i) $f(x) = \begin{cases} (z + \overline{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} (z + \overline{z})^2/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$

8.3 複素関数の微分

h を偏角一定の複素数とする. このとき極限値

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{8.2}$$

が h の取り方によらず一意に定まる時, $f(z)$ は $z=z_0$ で**微分可能**と言う. その極限値を $f(z)$ の $z=z_0$ における微分係数と言い, $f'(z_0)$ や $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ 等と記す. 領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時, $f(z)$ は D 上で**正則**であるという.

(1) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x$ として式 (8.2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(2) $f(z)=z^2$ とする. $h=i\Delta y$ として式 (8.2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(3) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x+i\Delta y$, $\Delta y=k\Delta x$ として, 式 (8.2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(4) $f(z)=z^n$ の場合, 式 (8.2) の極限は h の偏角の値によらず nz^{n-1} に収束することを示せ.

8.4 コーシー・リーマンの定理

(1) 領域 D で定義された複素関数 $f(z)$ の実部および虚部を $u(x,y), v(x,y)$ とする ($z = x+iy, z \in D$). u, v が連続で，かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.3}$$

を満たすならば，関数 $f(z)$ は領域 D 上で正則であることを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の必要条件の証明).

(2) 実関数 $u(x,y), v(x,y)$ が式 (8.3) を満たすとき, 複素関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ($z = x+iy$) は正則であることを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の十分条件の証明).

コーシー・リーマンの微分方程式 (8.3) を変形すると, $u(x,y), v(x,y)$ の満たす式として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

が得られる. これらは 2 次元のラプラス方程式である. ラプラス方程式の解は調和関数と呼ばれる. コーシー・リーマンの微分方程式 (8.3) の関係を満たすような調和関数の組を, **違いに共役な調和関数**という.

(3) $u(x,y) = e^x \sin y$ は調和関数であることを確かめよ.

(4) 上記の u に共役な調和関数 $v(x,y)$ を求めよ.

8.5 複素関数の正則性

以下の複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) の関数 $f(z)$ がコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

(1) $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$

(2) $f(z) = e^{-y}\,(\cos x + i\,\sin x)$

(3) $f(z) = z - \bar{z}$

(4) $f(z) = z + 1/z$