9.1 等角写像

関数 $f(z) = z^2$ による写像 $w = f(z)$ の性質について考える.

(1) z 平面上の 2 つの直線

(a) $z = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t + i\dfrac{t}{2}$

(b) $z = 1 + \dfrac{t}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

(ただし t は実数) の交点 z_0 と z_0 における直線の交角 θ を求めよ.

(2) (1) で与えられた 2 つの直線の写像 $f(z)$ による w 平面上の像を求め, それを図示せよ.

(3) (2) で求めた w 平面上での像の交点と, 交点における像の接線のなす角 θ' を求めよ.

9.2 有理関数の極と特異点

次の関数 $f(z)$ の特異点 z_0 を求め, それが極であるならばその位数 k と極限値

$$\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^k f(z)$$

を求めよ.

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z + 1}$

(2) $f(z) = \dfrac{2z - 1}{z^2 + 3z + 2}$

(3) $f(z) = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$ (n は 正の整数)

(4) $f(z) = c_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^k}$ (k は正の整数)

9.3 指数関数

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) を独立変数とする指数関数 e^z は

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

と定義される.

(1) 以下の指数関数の公式が成り立つことを示せ. ただし z_1, z_2 は複素数とする.

   (a) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

   (b) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

   (c) $|e^z| = e^x$

   (d) $e^{z+2k\pi i} = e^z \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(2) $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$ となることを示せ.

(3) e^{iz} の実部と虚部を求め, $\dfrac{de^{iz}}{dz} = ie^{iz}$ となることを示せ.

9.4 指数関数とその仲間

複素数 z の指数関数 e^z, 三角関数 $\cos z, \sin z$ は次の無限級数で定義される. ただし $0! = 1$ とする.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\cos z$ と $\sin z$ を e^{iz}, e^{-iz} を用いて表せ.

(2) $z = e^w$ を満たす w を対数関数といい $w = \log z$ で表す. このとき $\log z$ は無限多価関数であることを示せ.

z の偏角 θ を $0 \le \theta \le 2\pi$ の範囲に限った時これを $\log z$ の**主値**と呼び $\mathrm{Log} z$ と記す (注: 主値を与える範囲として $-\pi \le \theta \le \pi$ をとることもある).

(3) $\cos^{-1} z, \sin^{-1} z$ をそれぞれ対数関数であらわし, 導関数を求めよ.