

## 10.1 三角関数と双曲線関数

$z$  を複素数,  $i$  を虚数単位とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 次の複素三角関数の基本公式を証明せよ.

i)  $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

ii)  $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

iii)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

iv)  $\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$

(2)  $\cos z, \sin z$  の実部と虚部を求めよ.

(3) 次の複素双曲線関数の基本公式を証明せよ.

i)  $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

ii)  $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

iii)  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

iv)  $\cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z$

(4) 次の等式を証明せよ.

i)  $\sin(iz) = i \sinh z$

ii)  $\cos(iz) = \cosh z$

iii)  $\sinh(iz) = i \sin z$

iv)  $\cosh(iz) = \cos z$

(5)  $|\cos i| > 1$  となることを証明せよ.

## 10.2 ド・ロピタルの公式

$z$  を複素数とする. このとき以下の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{z^2 + 1}$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$$

$$(4) \lim_{z \rightarrow \pi/2} \frac{\cos z}{z - \pi/2}$$

$$(5) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

$$(6) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{z^3}$$

$$(7) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^z}{z}$$

$$(8) \lim_{z \rightarrow 3\pi i} \frac{z - 3\pi i}{\sinh z}$$

### 10.3 複素積分

- (1) 3点  $z = 0, z = 1, z = 1 + i$  を頂点とする三角形を正の向きに一周する閉曲線を  $C$  とする. 次の周回積分を求めよ.

i)  $\oint_C z dz$

ii)  $\oint_C \bar{z} dz$

iii)  $\oint_C e^{iz} dz$

- (2) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路  $C$  は点  $z = \alpha$  を中心とする半径  $a$  の円周を正の向きに 1 周するものとする.

i)  $\oint_C dz$

ii)  $\oint_C (z - \alpha) dz$

iii)  $\oint_C \frac{dz}{z - \alpha}$

iv)  $\oint_C (z - \alpha)^n dz$  ( $n$  は整数)

- (3) 積分

$$\int_C z dz \quad (C : z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < \pi/2)$$

について不等式

$$\left| \int_C z dz \right| < \int_C |z| |dz|$$

が成り立つことを示せ.