11.1 コーシーの積分定理

関数 $f(z)$ が領域 D 上で正則で，単純閉曲線 C がその内部も含めてすべて D に 属するものとする．このとき

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{11.1}$$

である．

解説 複素関数の積分 (複素積分) は複素平面上の線積分として定義される．複素平面上に滑らかな曲線C があるものとし，C の始点 A を z_0，終点 B を z_n とする．C を $n-1$ 個の点で分割する．分割点は A に近い物から順に $z_1, \cdots, z_{n-1}$ とする．

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

として，分割を十分細かくとった時の $f(\zeta_k)\Delta z_k$ (ζ_k は z_k と z_{k-1} の間の C 上の任意の点) の総和を $f(z)$ の複素積分と定義する．式で書けば

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

これは実積分に帰着させることができる．$f = u(x,y) + iv(x,y)$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\{u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + i[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]\}$$

であるから

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \tag{11.2}$$

とあらわされる．

証明 まず 2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_1(x,y)\boldsymbol{i} - A_2(x,y)\boldsymbol{j}$ についてストークスの定理を書き下す．A_2 にはのちの便宜上 $-$ をつけた．C を xy 面上の閉曲線とするとストークスの定理は

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})_3\,dS$$

である．ここで $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$ に注意すると，

$$\oint_C (A_1dx - A_2dy) = -\int_S \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\,dx\,dy$$

となる．ここで $A_1 = u, A_2 =$ とおいて上式に代入し，コーシー・リーマンの関係式を用いると

$$\int_C (udx - vdy) = 0.$$

同様に $A_1 = v, A_2 = -u$ とおくと

$$\int_C (vdx + udy) = 0$$

となることが分かる．従って閉曲線 C に沿って，C 上およびその内部で正則な関数を積分した場合，積分値は 0 になることが示される．

コーシーの積分定理は，正則な複素関数の積分はその経路によらず始点と終点の値のみよって決まると言うことを意味している．これはベクトル解析の言葉でいえば関数の実部と虚部が渦無しのベクトル場を作っていることにあたる．

(1) 複素数 z の関数 $\sin z$ は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$C_1 :\ z = \pi t \quad (0 \le t \le 1)$

$C_2 :\ z = \pi + i(t-1) \quad (1 \le t \le 2)$

$C_3 :\ z = -\pi(t-3) + i \quad (2 \le t \le 3)$

$C_4 :\ z = -i(t-4) \quad (3 \le t \le 4)$

に沿った $\sin z$ の周回積分は零となることを確かめよ.

(2) 複素数 z の関数 e^z は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$C_1 :\ z = t \quad (0 \le t \le 1)$

$C_2 :\ z = 1 + i\pi(t-1) \quad (1 \le t \le 2)$

$C_3 :\ z = -(t-3) + i\pi \quad (2 \le t \le 3)$

$C_4 :\ z = -i\pi(t-4) \quad (3 \le t \le 4)$

に沿った e^z の周回積分は零となることを確かめよ.

11.2 正則関数の積分

(1) $f(z)$ を領域 D において正則な関数 ($z \in \boldsymbol{C}$) とする. D 内の 2 点 P, Q を結び, かつ D 内に含まれる任意の 2 つの曲線 C_1, C_2 に沿って点 P から Q まで積分したとき,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つことを示せ.

(2) 互いに交わらない 2 つの閉曲線 C_1, C_2 を考える (ただし C_1 は C_2 の外側にあるとする). C_1, C_2 で囲まれた領域 D 内で正則かつ C_1, C_2 上で連続な関数 $f(z)$ を考える ($z \in \boldsymbol{C}$). このとき,

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = -\oint_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つこと示せ. ただし積分は領域 D を左に見る向きにとる.

(3) (1) より正則な複素関数 $f(z)$ の積分は経路によらない. これより $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

これより任意の複素数 α, β に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dg(z)}{dz}\,dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz}g(z)\,dz$$

を証明せよ.

11.3 さまざまな周回積分

(1) 以下の周回積分を求めよ. ただし積分路 C が, その内部に (a) a を含む場合, (b) $-a$ を含む場合, (c) $\pm a$ を含む場合, などに場合分けして考えること.

(i) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-a}\,dz$

(ii) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+a^2}\,dz$

(iii) $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\,dz$

(2) 原点を中心とする半径 r の円周を C とする. C を正の向きに 1 周する周回積分

$$\oint_C e^{iaz}\,dz$$

を求め, これを用いて以下の式を証明せよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\cos(\theta+ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\sin(\theta+ar\cos\theta)\,d\theta = 0$