4-2、コーシーの積分定理

コーシーの積分定理

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C で囲まれた領域 D 内で正則，C 上で連続であるとき、

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

が成立する.

証明)

Cauchy は2次元のグリーンの定理を用いて証明した.
ここではそれにならって証明を行う.

I) 2次元のグリーンの定理とその証明

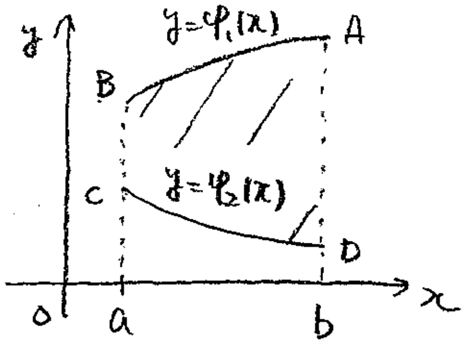
xy 平面上の単純閉曲線 C で囲まれた領域を D とする. C 上と D 内で微分可能で導関数が連続な関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 対し,

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

が成立する.（2次元のグリーンの定理）

証明)

まずDが以下のような単純な形の場合を考える.



$D=\{(x,y)\mid \varphi_2\leq y\leq \varphi_1,\ a\leq x\leq b\}$

Dの境界をCとする.

このとき,

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b \Big[P(x,y)\Big]_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}\,dx$$

$$= \int_a^b P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\,dx$$

一方

$$\oint_C P\,dx = \int_{AB} P\,dx + \int_{BC} P\,dx + \int_{CD} P\,dx + \int_{DA} P\,dx$$

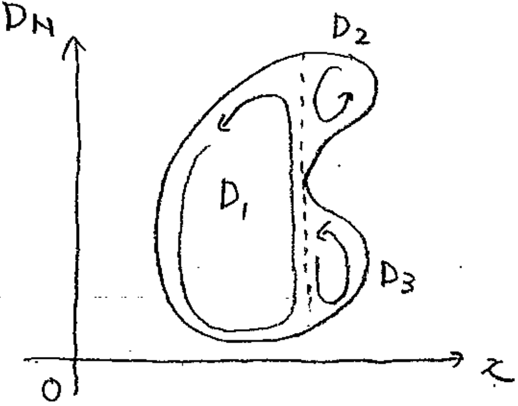
$$= -\int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx + \int_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx$$

$$= \int_a^b P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\,dx$$

$$\therefore \oint P\,dx = \iint -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Dが次のような一般的な形の場合、
Dを複数の領域 $D_1, D_2, \cdots D_N$
に分割しておく.
D_iの境界をC_iとすると,

$$\oint_{C_i} P\,dx = \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$



$$\therefore \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_i \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_i \oint_{C_i} P\,dx$$

C_iとC_jに共通部分があるとき、そこでの線積分は
互いに逆向きなので打ち消し合う.

$$\therefore \sum_i \oint_{C_i} P\,dx = \oint_C P\,dx$$

よって、任意の単純閉曲線Cに囲まれた
領域Dについて

$$\oint_C P\,dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

全く同様に

$$\oint_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

を示すことができる.

両辺の和をとって

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

//

II) コーシーの積分定理の証明

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ はC上で連続, D内で正則.

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u + iv)(dx + i\,dy)$$

$$= \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint u\,dy + v\,dx$$

2次元のグリーンの定理から、

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\oint_C u\,dy + v\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$f(z)$はD内で正則であるから, コーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成立する、

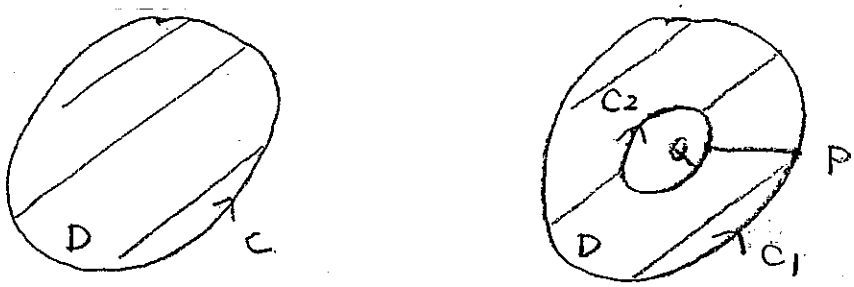
これより、

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

となる。

<u>領域Dが多重連結領域の場合</u>

同心円で囲まれた領域のように、複数の閉曲線で囲まれた領域を、<u>多重連結領域</u>という。



単連結領域　　　　多重連結領域

グリーンの定理は多重連結領域でも成立するので、コーシーの積分定理も成立する。

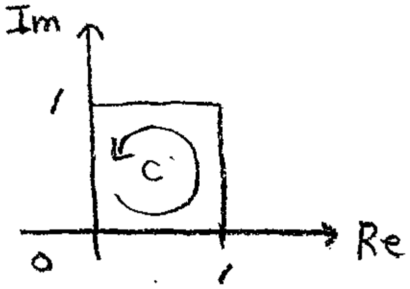
また、C_1, C_2上に P, Q をとって、線分 PQ で D を分割すると、$C_1 + PQ + C_2 + QP$ を C とすれば コーシーの積分定理が成立

$$0 = \oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \int_{PQ} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \int_{QP} f(z)\,dz$$

$$= \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

問題4-2.

(1) 次のような経路Cに沿って積分する.



$$\oint_C \sin z\,dz$$

$$= \int_0^1 \sin t\,dt$$

$$+ \int_1^2 \sin(1+i(t-1))\cdot i\,dt$$

$$+ \int_2^3 \sin((3-t)+i)\cdot(-1)\,dt + \int_3^4 \sin(4-t)i\cdot(-i)\,dt$$

$$= \Big[-\cos t\Big]_0^1 + \Big[-\cos(it+1-i)\Big]_1^2$$

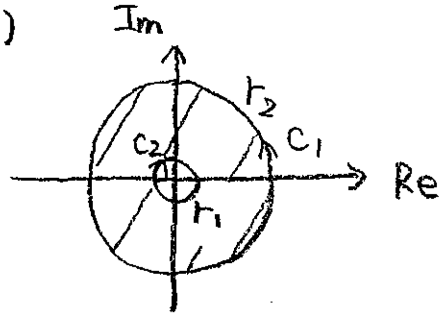
$$+ \Big[-\cos((3-t)+i)\Big]_2^3 + \Big[-\cos(4-t)i\Big]_3^4$$

$$= 1-\cos 1 + \cos 1 - \cos(i+1) + \cos(i+1) - \cos i$$

$$+ \cos i - 1$$

$$= 0$$

(2)



半径r_2の円を反時計回りに回る経路をC_1

半径r_1の円を時計回りに回る経路をC_2とする.

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

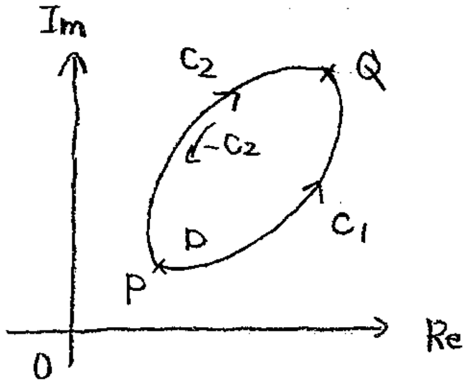
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_2 e^{i\theta}} r_2 i e^{i\theta}\, d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_1 e^{i\theta}} r_1 i e^{i\theta}\, d\theta$$

$$= 2\pi i - 2\pi i = 0$$

4-3、正則関数の積分について

コーシーの積分定理から得られる、正則関数の積分に関する重要な性質

I）<u>正則関数の積分の値は、積分路のとり方によらない。</u>

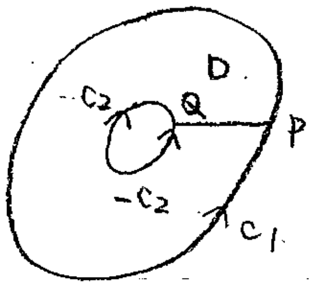


$f(z)$ は図の C_1, C_2 上、および $C_1 C_2$ で囲まれた領域 D で正則。
コーシーの積分定理から、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\therefore \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

II) 正則関数の周回積分の積分路は変形可能



互いに交錯しない閉曲線 C_1 と C_2 上で連続、C_1 と C_2 で囲まれた領域Dで正則な関数 $f(z)$ を考える。

このとき、

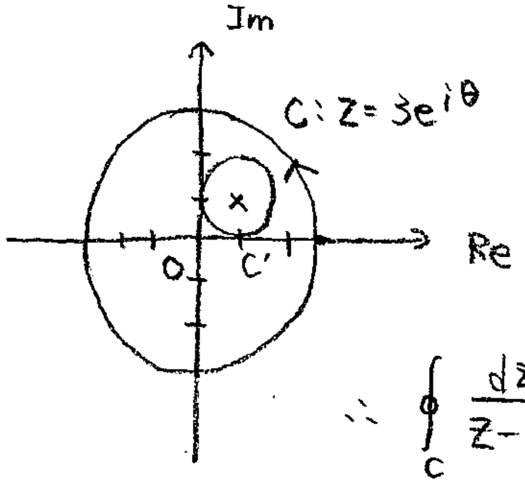
$$\oint_{C_1} f(z)\,dz + \int_{PQ} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{QP} f(z)\,dz = 0$$

$$\therefore \oint_{C_1} f(z)\,dz = -\int_{C_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-C_2} f(z)\,dz$$

例題 4-5.

$$\oint_C \frac{dz}{z-1}$$



$z=1$ を中心、半径1の円を C' とすると $f(z)$ は C, C' 上で連続、C と C' で囲まれた領域で正則。

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z-1} = \oint_{C'} \frac{dz}{z-1}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = 2\pi i$$

III) 正則関数 $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ は微分可能

正則関数 $f(z)$ は正則なので,

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')\,dz'$$

を積分路によらず一意に定めることができる.
$F(z)$ を $f(z)$ の不定積分、または原始関数という.

$F(z)$ の微分は

$$\frac{dF(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

任意の2点 α, β を結ぶ経路に沿った積分は、

$$F(\alpha) = \int_{z_0}^{\alpha} f(\zeta)\,d\zeta, \quad F(\beta) = \int_{z_0}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta$$

より、

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\beta}^{\alpha} f(\zeta)\,d\zeta$$

IV) 正則関数の積分に対し、実関数の積分公式を用いることができる.

例) 部分積分

$$\int_\beta^\alpha \frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\}\,dz = [f(z)g(z)]_\beta^\alpha$$

$$= f(\alpha)g(\alpha) - f(\beta)g(\beta)$$

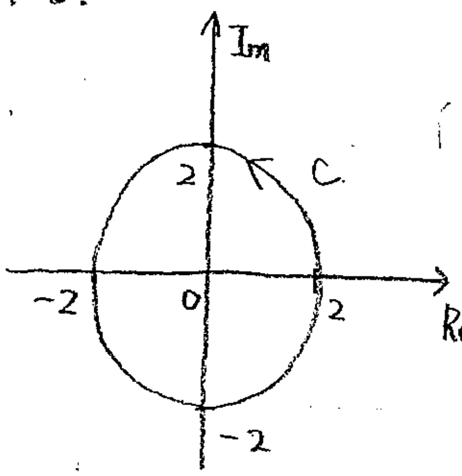
左辺

$$= \int_\beta^\alpha f(z)\frac{dg(z)}{dz}\,dz + \int_\beta^\alpha \frac{df(z)}{dz}g(z)\,dz$$

$$\therefore \int_\beta^\alpha f(z)\frac{dg(z)}{dz}\,dz = [f(\alpha)\,f(\beta)]_\beta^\alpha - \int_\beta^\alpha \frac{df(z)}{dz}g(z)\,dz$$

問題 4-3.

(1)

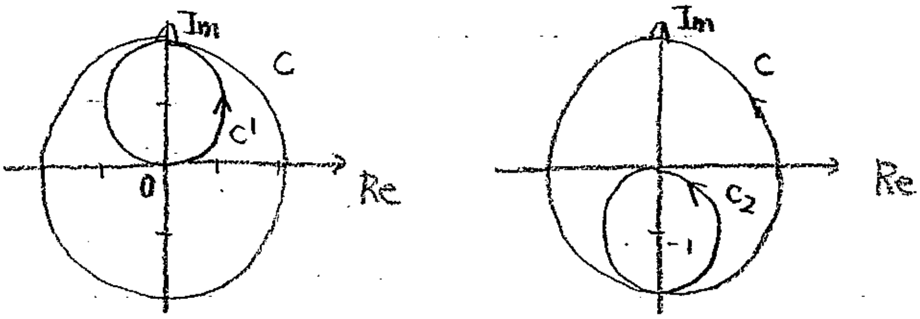


積分路は図のようにとる.

i) $\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \oint_C \frac{dz}{(z+i)(z-i)}$

$$= \frac{1}{2i}\oint\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz \qquad (*)$$

積分路を以下のようにとり直す。



$$(*) = \frac{1}{2i}\left\{\oint_{C_1}\frac{dz}{z-i} - \oint_{C_2}\frac{dz}{z+i}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta - \int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}(2\pi i - 2\pi i) = 0$$

ii) $\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2}\oint_C\left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right)dz$

$$= \frac{1}{2}\left\{\oint_{C_1}\frac{dz}{z-i} + \oint\frac{dz}{z+i}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi i + 2\pi i)$$

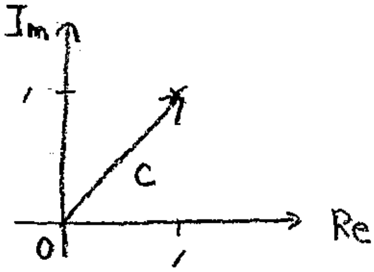
$$= 2\pi i$$

(2)

i) $\displaystyle\int_0^{1+i} z^2\,dz$

$f(z)=z^2$ は正則、よって積分は経路のとり方によらない.

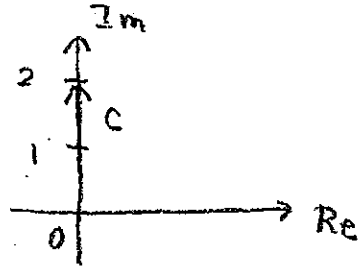
$$\therefore \int_0^{1+i} z^2\,dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^{1+i}$$



$$= \frac{1}{3}(1+i)^3$$

$$= \frac{1}{3}(1+3i-3-i) = \frac{2}{3}(i-1)$$

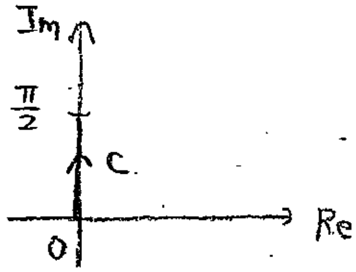
ii) $$\int_i^{2i} z^2\,dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_i^{2i}$$



$$= \frac{1}{3}(-8i+i) = -\frac{7}{3}i$$

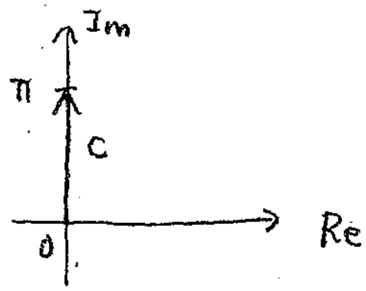
iii) $f(z)=e^z$ は正則.

$$\therefore \int_0^{\pi/2\, i} e^z\,dz = \left[e^z\right]_0^{\frac{\pi}{2}i}$$



$$=(e^{\frac{\pi}{2}i}-1) = i-1$$

iv) $f(z)=\cos z$ は正則



$$\therefore \int_0^{\pi i} \cos z\,dz = \left[\sin z\right]_0^{\pi i}$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{-\pi}-e^{\pi}) = \frac{i}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$$

$$= i\sinh\pi$$