

解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

- (1) オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が成り立つことを示せ.

- (2) ド・モアブルの公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が成り立つことを示せ.

- (3) z を複素数とするとき, $z^3 = -1$ の根を全て求め, それを複素平面上に図示せよ.

問題 2

z を複素数とするとき以下の周回積分を求めよ.

(1) $\oint_C \frac{1}{z-a} dz$

(2) $\oint_C \frac{1}{z^2+a^2} dz$

(3) $\oint_C \frac{z}{z^2+a^2} dz$

問題 3

次の関数の極とその位数, その極における留数を求めよ.

$$(1) \frac{z-1}{z^2+2z+2}$$

$$(2) \frac{z}{\sinh z}$$

$$(3) \frac{\cos \pi z}{z^4-16}$$

問題 4

複素積分を利用して以下の積分を求めよ. ただし a, b は実数とする.

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} \quad (a > b)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4} dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^4+a^4} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin bx}{x^4+a^4} dx \quad (a, b > 0)$$