## 解答上の注意

1. 問題用紙 3 枚, 答案用紙 4 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

# 問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla\times(\varphi\nabla\varphi) = 0$

(2) $\nabla\cdot(\nabla\varphi\times\nabla\psi) = 0$

(3) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

# 問題 2

$n$ 個の質点からなる系を考え, 各質点の質量を $m_i(i = 1\cdots,n)$ とする.

(1) 質点系の運動量 $\boldsymbol{P}$ は各質点の運動量のベクトル和であるとすると,

$$\boldsymbol{P} = m\overline{\boldsymbol{v}}$$

と表されることを示せ. ここで $m$ は質点系の質量の総和, $\overline{\boldsymbol{v}}$ は重心の速度ベクトルである.

(2) 各質点に作用する力を $\boldsymbol{F}_i(i = 1\cdots,n)$ とする. 重心の加速度を $\overline{\boldsymbol{a}}$ とすると,

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\bar{a}$$

となることを示せ.

# 問題 3

極座標系 $(r, \theta, \phi)$ について以下の問に答えよ.

(1) $(x, y, z)$ を $(r, \theta, \phi)$ を用いて表せ.

(2) スケール因子 $h_r, h_\theta, h_\phi$ を求めよ.

(3) 直交曲線座標系 $(u_1, u_2, u_3)$ におけるスカラー $\varphi$ の勾配は

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 $u_j$ は $u_j$ 成分であることを示す. これを用いて球座標系における $\varphi$ の勾配の各成分を表せ.

(4) 直交曲線座標系 $(u_1, u_2, u_3)$ におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right)$$

と表される. これを用いて球座標系における $\boldsymbol{A}$ の発散を表わせ.

(5) 直交曲線座標系 $(u_1, u_2, u_3)$ におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転は

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_{u_i} = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 $u_i$ は $u_i$ 成分であることを示す. これを用いて球座標系における $\boldsymbol{A}$ の回転の各成分を表せ.

# 問題 4

(1) 一階微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と, $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲面 $S$ および $S$ によって囲まれた領域 $V$ を考える. このとき,

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV$$

が成り立つことを示せ.

(2) 一階微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と, $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲線 $C$ および $C$ によって囲まれた曲面 $S$ を考える. このとき,

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}dS$$

が成り立つことを示せ.