14.1 極と留数

(1) 次の各関数について, 極とその位数, 極における留数を求めよ.

i) $\dfrac{z-1}{z^2+2z+2}$

ii) $\dfrac{z}{\sinh z}$

iii) $\dfrac{\cos \pi z}{z^4-16}$

iv) $\dfrac{e^{\pi z}}{z^2+9}$

(2) 次の関数の $z=\infty$ における留数を求めよ (ヒント: $z=1/w$ と変数変換し, 変換された関数の $w=0$ での留数を計算する).

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \alpha_n z^n$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \alpha_n z^{-n}$

iii) $\dfrac{z^3}{z^4-1}$

iv) $\dfrac{z^3}{z^2+1}$

14.2 留数定理を用いた複素積分

次の積分を留数定理を用いて計算せよ. ただし積分路はすべて正の向きにとるものとする.

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(3z-i)}$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(2z-1)(3z-2)}\, dz$

(3) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^4-1}$

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^5+32}$

(5) $\displaystyle\oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^5+32}$

14.3 留数定理を用いた実関数の積分 (1)

実関数 $f(\cos\theta, \sin\theta)$ は $\cos\theta, \sin\theta$ の有理関数で, $0 \le \theta \le 2\pi$ で連続とする. このとき以下の積分について考える.

$$I_R = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta. \tag{14.1}$$

上記の積分は, $z = e^{i\theta}$ とおき,

$$I_R = \frac{1}{i}\oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{z}$$

と表される. ここで C は複素平面上の原点を中心とする単位円に沿って正の向きに一周する経路である. コーシーの積分定理と留数定理から, 上記の積分は

$$I_R = \begin{cases} 0 & f/z \text{ が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \mathrm{Res}\,[f/z]_{z=z_n} & f/z \text{ が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_n は C 内における f/z の極である. この結果を利用して以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} \quad (a > b > 0)$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + b\cos\theta}\, d\theta \quad (a > b > 0)$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1 - 2a\cos 2\theta + a^2}\, d\theta \quad (1 > a \ge 0)$

14.4 留数定理を用いた実関数の積分 (2)

実関数 $f(x)$ が x の有理関数で, 分母の次数が分子の次数よりも 2 以上大きいとする このとき以下の積分

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{14.2}$$

は, 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)\,dz$$

と表される. ここで z は複素数で, C は図 14.1 のように実軸上の線分 $-R \le x \le R$ と, 原点を中心とする半径 R の上半円 Γ に沿って正の向きに一周する経路である. コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z) \text{ が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \text{Res } f(z_k) & f(z) \text{ が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である (Im $z_k > 0$). これを用いて以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx$

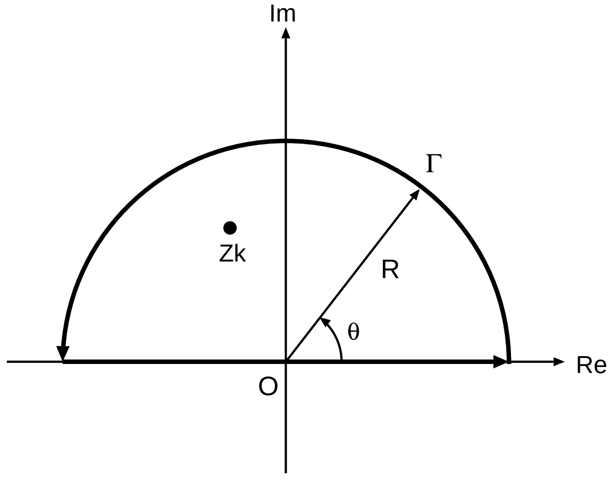

図 14.1:

14.5 留数定理を用いた実関数の積分 (3)

実関数 $f(x)$ は x の有理関数で, 分母の次数が分子の次数より 1 以上大きいとする. このとき以下の積分

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx \quad (a > 0) \tag{14.3}$$

は, 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)e^{iaz}\,dz$$

と表されることを示せ. ここで z は複素数で, C は図 14.1 に示した積分路とする. コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z)e^{iaz}\text{が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,[f(z)e^{iaz}]_{z=z_k} & f(z)e^{iaz}\text{が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である ($\mathrm{Im}\, z_k > 0$). これを用いて以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{a^2+b^2}\,dx \quad (a, b \text{ は実定数})$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^4+a^4}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin bx}{x^4+a^4}\,dx \quad (a, b \text{ は正の実定数})$