2.1 ベクトルの微分

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ とする. このときベクトル $\boldsymbol{a}$ の導関数は以下のように与えられる.

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+h)-\boldsymbol{a}(t)}{h} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt}\right).$$

このとき以下が成り立つことを示せ. ここでベクトル $\boldsymbol{a}$ と同様に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ とする.

(1)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$$

(2)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

(3)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

(4)

$$\frac{d}{dt}\left\{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right\} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\cdot(\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{c}}{dt})$$

2.2 ベクトルの積分

変数 t のベクトル関数があり, その微分が $\boldsymbol{a}(t)$ であるとき, もとのベクトル関数を $\boldsymbol{a}(t)$ の不定積分といい,

$$\int \boldsymbol{a}(t)\,dt$$

と表す.

$\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \boldsymbol{a}(t)$ ならば,

$$\int \boldsymbol{a}(t)\,dt = \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{c}$$

である. ここで $\boldsymbol{c}$ は t に依存しない任意のベクトル関数である.

(1) $\boldsymbol{a}(a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ のとき, $\int \boldsymbol{a}(t)\,dt$ の成分を $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ を用いて表せ.

(2) 次の不定積分を求めよ. ただし $|\boldsymbol{a}(t)| = a(t)$ とする

(i) $\displaystyle\int \boldsymbol{a} \cdot \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\, dt$

(ii) $\displaystyle\left(\int \boldsymbol{a} \times \frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}\right) dt$

(ii) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{a}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} - \frac{da}{dt}\frac{\boldsymbol{a}}{a^2}\right) dt$

ベクトル関数 $\boldsymbol{a}(t)$ の定義域を $[t_0, T]$ とする. 区間 $[t_0, T]$ を N 個の小区間に分割し, 各区間の長さを Δt_i $(i = 1, 2, \cdots N)$, 各区間における任意の t の値に対する $\boldsymbol{a}(t)$ の値を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N$ とする. このとき

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i \Delta t_i$$

を $N \to \infty$ としたときの極限値が存在する場合, これを $t = t_0$ から T へ至る $\boldsymbol{a}(t)$ の定積分といい,

$$\int_{t_0}^{T} \boldsymbol{a}(t)\, dt \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i \Delta t_i$$

と表す.

(3) 時間 t とともに位置と速度を変えながら運動する質点を考える. 質点の位置を $\boldsymbol{r}(t)$, 速度を $\boldsymbol{v}(t)$ とするとき, 時刻 t_0 から t_1 に至るまでの質点の変移は

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\, dt = \boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0)$$

となることを示せ.

2.3 角速度

ある軸のまわりに剛体が一定の角速度 ω で回転しているときの剛体内の点 P の速度 $\boldsymbol{v}$ を, 以下の手順に沿って解析的に求めてみよう.

回転軸の方向余弦を $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (c_1, c_2, c_3)$ とする. この回転軸に沿った微小回転により, (x, y, z) 座標系が (x', y', z') 座標系に変化し, 基底ベクトルも $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ から $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ へ変化する. 基底ベクトルの変移を $d\boldsymbol{e}'_i \equiv \boldsymbol{e}'_i - \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とし,

$$d\boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}'_1 + a_{12}\boldsymbol{e}'_2 + a_{13}\boldsymbol{e}'_3, \tag{2.1}$$

$$d\boldsymbol{e}'_2 = a_{21}\boldsymbol{e}'_1 + a_{22}\boldsymbol{e}'_2 + a_{33}\boldsymbol{e}'_3, \tag{2.2}$$

$$d\boldsymbol{e}'_3 = a_{31}\boldsymbol{e}'_1 + a_{32}\boldsymbol{e}'_2 + a_{33}\boldsymbol{e}'_3 \tag{2.3}$$

と表すことにする.

(1) $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ に成り立つ直交関係

$$\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

を微分することにより, 以下の等式が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_i \cdot d\boldsymbol{e}'_j = 0 \quad (i = j) \\ d\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j + \boldsymbol{e}'_i \cdot d\boldsymbol{e}'_j = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

(2) 式 (2.1), (2.2), (2.3) にそれぞれ $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ との内積をとることより, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0,$$

$$a_{12} + a_{21} = 0, \quad a_{23} + a_{32} = 0, \quad a_{31} + a_{13} = 0.$$

これより 9 個の a_{ij} のうち独立なものは 3 つだけとなる. $a_1 \equiv a_{23} = -a_{32}$, $a_2 \equiv a_{31} = -a_{13}$, $a_3 \equiv a_{12} = -a_{21}$ と置き直すと, 式 (2.1), (2.2), (2.3) はそれぞれ

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{e}'_1 &= a_3\boldsymbol{e}'_2 - a_2\boldsymbol{e}'_3, \\ d\boldsymbol{e}'_2 &= -a_3\boldsymbol{e}'_1 + a_1\boldsymbol{e}'_3, \\ d\boldsymbol{e}'_3 &= a_2\boldsymbol{e}'_1 - a_1\boldsymbol{e}'_2 \end{aligned}$$

となる. $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ と $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ の差は非常に小さいので, 高次の微小量を無視すると,

$$d\boldsymbol{e}'_1 = a_3\boldsymbol{e}_2 - a_2\boldsymbol{e}_3, \tag{2.4}$$

$$d\boldsymbol{e}'_2 = -a_3\boldsymbol{e}_1 + a_1\boldsymbol{e}_3, \tag{2.5}$$

$$d\boldsymbol{e}'_3 = a_2\boldsymbol{e}_1 - a_1\boldsymbol{e}_2 \tag{2.6}$$

と表すことができる.

(3) 回転前の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると, (x, y, z) 座標系と (x', y', z') 座標系は一致するので,

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y\boldsymbol{e}'_2 + z\boldsymbol{e}'_3.$$

となる. 回転後は (x, y, z) 座標系では位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r} = (x + dx)\boldsymbol{e}_1 + (y + dy)\boldsymbol{e}_2 + (z + dz)\boldsymbol{e}_3$$

となる. これを (x', y', z') 座標系で見ると,

$$\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r} = x'(\boldsymbol{e}'_1 + d\boldsymbol{e}'_1) + y'(\boldsymbol{e}'_2 + d\boldsymbol{e}'_2) + z'(\boldsymbol{e}'_3 + d\boldsymbol{e}'_3)$$

となる. 回転後のそれぞれの座標系での位置ベクトルの表現を比較することから, 座標の変化は

$$dx = a_2 z' - a_3 y',$$
$$dy = a_3 x' - a_1 z',$$
$$dz = a_1 y' - a_2 x'$$

となることを示せ (ヒント: 式 (2.4), (2.5), (2.6) を用いる).

(x, y, z) と (x', y', z') の差は非常に小さいので, 高次の微小量を無視すると, 上記の結果は

$$dx = a_2 z - a_3 y,$$
$$dy = a_3 x - a_1 z,$$
$$dz = a_1 y - a_2 x$$

とすることができる. 明らかに $x : y : z = a_1 : a_2 : a_3$ となるような直線上では $dx = dy = dz = 0$ である. よって回転軸の方向余弦が (c_1, c_2, c_3) のときの回転による座標変化は

$$dx = c_2 z - c_3 y, \tag{2.7}$$
$$dy = c_3 x - c_1 z, \tag{2.8}$$
$$dz = c_1 y - c_2 x \tag{2.9}$$

と表される.

(4) 上記の回転による座標変化が微小時間 dt の間に生じたとしよう. このとき式 (2.7),(2.8),(2.9) より,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c_2}{dt} z - \frac{c_3}{dt} y,$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{c_3}{dt} x - \frac{c_1}{dt} z,$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{c_1}{dt} y - \frac{c_2}{dt} x$$

となる. ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left(\frac{c_1}{dt}, \frac{c_2}{dt}, \frac{c_3}{dt}\right)$$

と定義すると, 点 P の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

と表されることを示せ.