

3.1 運動の法則

ニュートンの運動の三法則は

- 外力を与えられない質点の運動量は時間変化しない (慣性の法則)
- 質点の運動量の時間変化は, 与えられた力の大きさに比例し力の方向に作用する (運動の法則)
- 質点 A が別の質点 B に力を及ぼすとき, 質点 A は質点 B から同じ大きさで向きが反対の力を受ける (作用反作用の法則)

である. 質点の質量と速度をそれぞれ m, v , 質点に与えられる外力を F とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 上記の慣性の法則と運動の法則を式で表せ.
- (2) 力 F が時刻 t_0 から t_1 まで作用したとする. このとき,

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt$$

をその間における力 F の力積という. このとき

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt = m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)$$

と表されることを示せ. ここで $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ はそれぞれ時刻 t_0, t_1 における速度である.

- (3) 定点 O に対する質点の位置ベクトルを \mathbf{r} とするとき, 質点の運動量のモーメント (角運動量) L は以下のように定義される.

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

L の時間変化は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

と表されることを示せ.

- (4) 質点の運動エネルギー T は以下のように定義される.

$$T(t) \equiv \frac{1}{2} m\mathbf{v}(t)^2.$$

時刻 t_0, t_1 における運動エネルギーをそれぞれ T_0, T_1 とすると,

$$T_1 - T_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$$

となることを示せ.

3.2 質点系の角運動量と運動エネルギー

n 個の質点からなる系を考える. 各質点の質量を $m_i (i = 1 \cdots n)$, 位置ベクトルを $\mathbf{r}_i (i = 1 \cdots n)$ とする.

(1) 系の全運動エネルギー T_{all} は

$$T_{all} = \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})^2$$

と表されることを示せ. ここで m は系の全質量, $\bar{\mathbf{r}}$ は重心の位置ベクトル, $\bar{\mathbf{v}}$ は重心の速度である.

(2) i 番目の質点の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{f}_{i,ex} + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij}$$

とする. ここで $\mathbf{f}_{i,ex}$ は i 番目の質点に働く外力, \mathbf{f}_{ij} は j 番目の質点が i 番目の質点に及ぼす内力で $\mathbf{f}_{ii} = 0$ である. このとき系の全角運動量 \mathbf{L}_{all} の時間変化は

$$\frac{d\mathbf{L}_{all}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_{i,ex}, \quad \mathbf{N}_{i,ex} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{i,ex}$$

となることを示せ.

3.3 惑星の軌道

太陽の周囲を公転する惑星は, 万有引力の法則にしたがい太陽からの距離の 2 乗に比例した力を受ける. その運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}$$

と表される. ここで \mathbf{r} は太陽を原点とする惑星の位置ベクトル, $r = |\mathbf{r}|$, M は太陽の質量, G は万有引力定数である.

(1) 惑星の面積速度を \mathbf{h} とおくと,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{h} = -\frac{GM}{2r^3} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v}]$$

と表されることを示せ. ここで \mathbf{v} は惑星の速度である.

(2) (1) の結果を利用して

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = \frac{GM}{2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + e\mathbf{a} \right)$$

となることを示せ. ここで $e\mathbf{a}$ は定ベクトル, e は任意のスカラー, \mathbf{a} は単位ベクトルである.

(3) (2) で求めた式と r との内積をとることで

$$r = \frac{4h^2/(GM)}{1 + e \cos \theta}$$

となることを示せ. ここで θ は r と a とのなす角である. また e の値によって r の描く軌跡がどうなるか説明せよ.

3.4 回転系の運動方程式

静止している直交座標系に対し, 第 3 軸を軸として一定の角速度 ω で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ.

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを e_1, e_2, e_3 , 回転する座標系の基底ベクトルを e'_1, e'_2, e'_3 とする. このとき

$$\frac{de'_1}{dt} = \omega \times e'_1, \quad \frac{de'_2}{dt} = \omega \times e'_2, \quad \frac{de'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ. ただし $\omega = \omega e'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $r = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3 = r'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{dt} &= \frac{d'r}{dt} + \omega \times r', \\ \frac{d^2r'}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d'r}{dt} + \omega \times (\omega \times r'). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d'r}{dt} &= \frac{d'x'}{dt} e'_1 + \frac{d'y'}{dt} e'_2 + \frac{d'z'}{dt} e'_3, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt^2} e'_1 + \frac{d^2y'}{dt^2} e'_2 + \frac{d^2z'}{dt^2} e'_3 \end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$\frac{d^2r}{dt^2} = F$$

を回転系の表現に変換せよ.