

## 6.1 一般化座標

座標  $r$  を直交直線座標  $(x, y, z)$  に代わる 3 つの変数  $(u, v, w)$  で表す場合を考える.  $u, v, w$  はともに  $x, y, z$  の関数である. 例えば円筒座標では変数として  $(r, \phi, z)$  を用い, それぞれ  $x, y, z$  と次の関係にある.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), z = z$$

球座標  $(r, \theta, \phi)$  では

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

である.

- (1) 直交直線座標と円筒座標の幾何学的関係を図示し,  $(x, y, z)$  を  $(r, \phi, z)$  を用いて表せ.
- (2) 直交直線座標と球座標の幾何学的関係を図示し,  $(x, y, z)$  を  $(r, \theta, \phi)$  を用いて表せ.

$u$  曲線とは,  $v, w$  を固定して  $u$  を変化させた時に座標  $r$  が描く軌跡のことを言う. その接ベクトル  $r_u$  は次式で与えられる

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u} e_x + \frac{\partial y}{\partial u} e_y + \frac{\partial z}{\partial u} e_z$$

$v, w$  曲線およびその接ベクトル  $r_v, r_w$  は同様に定義される. これら接ベクトルの方向をそれぞれ  $u, v, w$  方向という.

- (3) 円筒座標において  $r_r, r_\phi, r_z$  を  $r, \phi, z, e_x, e_y, e_z$  を用いて表せ.
- (4) 球座標において  $r_r, r_\theta, r_\phi$  を  $r, \theta, \phi, e_x, e_y, e_z$  を用いて表せ.

$u$  曲線のスケール因子  $h_u$  とは,  $u$  方向接ベクトルの長さ  $|r_u|$  のことを言う. ここから  $u$  方向単位ベクトル  $e_u$  が

$$e_u = \frac{r_u}{h_u} \text{ または } r_u = h_u e_u$$

と定義される.  $v, w$  曲線のスケール因子  $h_v, h_w$ ,  $v, w$  方向単位ベクトル  $e_v, e_w$  も同様に定義される.  $e_u, e_v, e_w$  は一般化座標系  $(u, v, w)$  での基本単位ベクトルである.

- (5) 円筒座標において  $h_r, h_\phi, h_z$  を求めよ.
- (6) 球座標において  $h_r, h_\theta, h_\phi$  を求めよ.

## 6.2 直交曲線座標における勾配

スカラー場  $\varphi$  の勾配  $\text{grad } \varphi$  はベクトルであり, 直交直線座標系の基本単位ベクトルを用いて

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

と表される. これを直交曲線座標  $(u_1, u_2, u_3)$  で表すには, この直交曲線座標の基本単位ベクトル  $\mathbf{e}_{u_j}$  を用いる. 各成分  $(\text{grad } \varphi)_{u_j}$  は  $\text{grad } \varphi$  を各基本単位ベクトルの方向に射影したものである.

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{e}_{u_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{u_j}$$

となる.

- (1)  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{u_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$  を示せ. この表式では和の規約は用いず, スケール因子は  $h_{u_j} = h_j$  と記すものとする [ヒント: 問題 6.1 の  $\mathbf{e}_{u_j}$  の定義を思い出す].

- (2) 恒等式  $\frac{df(x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi))}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\xi}$  を利用し,

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

を示せ. この表式も和の規約は用いない.

- (3) 円筒座標における勾配は

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

と表されることを示せ.

- (4) 上と同様に球座標における  $\text{grad } \varphi$  の表式を書き下せ.

### 6.3 直交曲線座標における発散

直交曲線座標  $(u_1, u_2, u_3)$  で表されるベクトル場  $A = A_i e_{u_i}$  の発散の表式について考える。これは発散の定義から丹念に計算しても導けるが、ガウスの定理  $\int_V \nabla \cdot A \, dV = \int_S A \cdot dS$  を用いて導く方が簡単である。これを念頭に以下の問いに答えよ。

- (1) 円筒座標における  $\nabla \cdot A$  の表式を求めよ。
- (2) 球座標における  $\nabla \cdot A$  の表式を求めよ。

### 6.4 直交曲線座標における回転

直交曲線座標  $(u_1, u_2, u_3)$  で表されるベクトル場  $A = A_i e_{u_i}$  の回転の表式について考える。これは回転の定義から丹念に計算しても導ける、ストークスの定理  $\int_S \nabla \times A \, dS = \oint A \cdot dr$  を使って導出した方が簡単である。これを念頭に以下の問いに答えよ。

- (1) 円筒座標における  $\nabla \times A$  の表式を求めよ。
- (2) 球座標における  $\nabla \times A$  の表式を求めよ。

### 6.5 直交曲線座標におけるラプラシアン

- (1) 勾配と発散の一般形から直交曲線座標におけるラプラシアン  $\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi)$  の一般形を導け。
- (2) 円筒座標における  $\nabla^2 \varphi$  の表式を求めよ。
- (3) 球座標における  $\nabla^2 \varphi$  の表式を求めよ。