10.1 有理関数の極と特異点

次の関数 $f(z)$ の特異点 z_0 を求め, それが極であるならばその位数 k と極限値

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$$

を求めよ.

(1) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

(2) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

(3) $f(z) = \dfrac{z^3-z^2}{z^2+1}$

(4) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$

(5) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3-z^2-z+1}$

(6) $f(z) = \dfrac{2z-1}{z^2+3z+2}$

(7) $f(z) = \dfrac{1-z^n}{1-z}$ (n は 正の整数)

(8) $f(z) = c_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^k}$ (k は正の整数)

10.2 指数関数

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) を独立変数とする指数関数 e^z は

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

と定義される.

(1) 以下の指数関数の公式が成り立つことを示せ. ただし z_1, z_2 は複素数とする.

(a) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

(b) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

(c) $|e^z| = e^x$

(d) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(2) $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$ となることを示せ.

(3) e^{iz} の実部と虚部を求め, $\dfrac{de^{iz}}{dz} = ie^{iz}$ となることを示せ.

10.3 指数関数とその仲間

複素数 z の指数関数 e^z, 三角関数 $\cos z, \sin z$ は次の無限級数で定義される. ただし $0! = 1$ とする.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\cos z$ と $\sin z$ を e^{iz}, e^{-iz} を用いて表せ.

(2) $z = e^w$ を満たす w を対数関数といい $w = \log z$ で表す. このとき $\log z$ は無限多価関数であることを示せ.

z の偏角 θ を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲に限った時これを $\log z$ の**主値**と呼び $\mathrm{Log} z$ と記す (注: 主値を与える範囲として $-\pi \leq \theta \leq \pi$ をとることもある).

(3) $\cos^{-1} z, \sin^{-1} z$ をそれぞれ対数関数であらわし, 導関数を求めよ.