11.1 三角関数と双曲線関数

z を複素数, i を虚数単位とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 次の複素三角関数の基本公式を証明せよ.

i) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

ii) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

iv) $\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$

(2) $\cos z, \sin z$ の実部と虚部を求めよ.

(3) 次の複素双曲線関数の基本公式を証明せよ.

i) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

ii) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

iii) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

iv) $\cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z$

(4) 次の等式を証明せよ.

i) $\sin(iz) = i \sinh z$

ii) $\cos(iz) = \cosh z$

iii) $\sinh(iz) = i \sin z$

iv) $\cosh(iz) = \cos z$

(5) $|\cos i| > 1$ となることを証明せよ.

11.2 ド・ロピタルの公式

z を複素数とする. このとき以下の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z-i}$

(2) $\displaystyle \lim_{z\to i} \frac{z-i}{z^2+1}$

(3) $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}$

(4) $\displaystyle \lim_{z\to \pi/2} \frac{\cos z}{z-\pi/2}$

(5) $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2}$

(6) $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{z-\sin z}{z^3}$

(7) $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{1-e^z}{z}$

(8) $\displaystyle \lim_{z\to 3\pi i} \frac{z-3\pi i}{\sinh z}$

11.3 複素積分

(1) 3 点 $z=0$, $z=1$, $z=1+i$ を頂点とする三角形を正の向きに一周する閉曲線を C とする. 次の周回積分を求めよ.

i) $\oint_C z\,dz$

ii) $\oint_C \overline{z}\,dz$

iii) $\oint_C e^{iz}\,dz$

(2) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路 C は点 $z=\alpha$ を中心とする半径 a の円周を正の向きに 1 周するものとるする.

i) $\oint_C dz$

ii) $\oint_C (z-\alpha)\,dz$

iii) $\oint_C \dfrac{dz}{z-\alpha}$

iv) $\oint_C (z-\alpha)^n\,dz$ (n は整数)

(3) 積分

$$\int_C z\,dz \quad (C: z=e^{i\theta}, 0\leq\theta<\pi/2)$$

について不等式

$$\left|\int_C z\,dz\right| < \int_C |z|\,|dz|$$

が成り立つことを示せ.