

## 12.1 コーシーの積分定理

関数  $f(z)$  が領域  $D$  上で正則で, 単純閉曲線  $C$  がその内部も含めてすべて  $D$  に属するものとする. このとき

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (12.1)$$

である.

- (1) 複素数  $z$  の関数  $\sin z$  は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$$C_1: z = \pi t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$C_2: z = \pi + i(t-1) \quad (1 \leq t \leq 2)$$

$$C_3: z = -\pi(t-3) + i \quad (2 \leq t \leq 3)$$

$$C_4: z = -i(t-4) \quad (3 \leq t \leq 4)$$

に沿った  $\sin z$  の周回積分は零となることを確かめよ.

- (2) 複素数  $z$  の関数  $e^z$  は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$$C_1: z = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$C_2: z = 1 + i\pi(t-1) \quad (1 \leq t \leq 2)$$

$$C_3: z = -(t-3) + i\pi \quad (2 \leq t \leq 3)$$

$$C_4: z = -i\pi(t-4) \quad (3 \leq t \leq 4)$$

に沿った  $e^z$  の周回積分は零となることを確かめよ.

## 12.2 正則関数の積分 (1)

- (1)  $f(z)$  を領域  $D$  において正則な関数 ( $z \in C$ ) とする.  $D$  内の 2 点  $P, Q$  を結び, かつ  $D$  内に含まれる任意の 2 つの曲線  $C_1, C_2$  に沿って点  $P$  から  $Q$  まで積分したとき,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 互いに交わらない 2 つの閉曲線  $C_1, C_2$  を考える (ただし  $C_1$  は  $C_2$  の外側にあるとする).  $C_1, C_2$  で囲まれた領域  $D$  内で正則かつ  $C_1, C_2$  上で連続な関数  $f(z)$  を考える ( $z \in C$ ). このとき,

$$\oint_{C_1} f(z) dz = - \oint_{C_2} f(z) dz$$

が成り立つことを示せ. ただし積分は領域  $D$  を左に見る向きにとる.

- (3) (1) より正則な複素関数  $f(z)$  の積分は経路によらない. これより  $f(z)$  の不定積分  $F(z)$  を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

これより任意の複素数  $\alpha, \beta$  に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta) d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) \frac{dg(z)}{dz} dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz} g(z) dz$$

を証明せよ.

### 12.3 正則関数の積分 (2)

- (1) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路  $C$  は原点を中心とする半径 2 の円を反時計周りに一周するものとする.

(i)  $\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1}$

(ii)  $\oint_C \frac{z}{z^2 + 1} dz$

- (2) 次の積分の値を求めよ.

(i)  $\int_0^{1+i} z^2 dz$

(ii)  $\int_0^{(\pi/2)i} e^z dz$

- (3) 原点を中心とする半径  $r$  の円周を  $C$  とする.  $C$  を正の向きに 1 周する周回積分

$$\oint_C e^{iaz} dz$$

を求め, これを用いて以下の式を証明せよ.

(i)  $\int_0^{2\pi} e^{-ar \sin \theta} \cos(\theta + ar \cos \theta) d\theta = 0$

(ii)  $\int_0^{2\pi} e^{-ar \sin \theta} \sin(\theta + ar \cos \theta) d\theta = 0$

### 12.4 正則関数の積分 (3)

複素平面上において次式で与えられる曲線  $C_1, C_2, C_3$  が与えられたとする. このとき以下の問いに答えよ.

$$C_1 : z = \sqrt{3}e^{i\pi t} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$C_2 : z = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$C_3 : z = i + e^{i\pi t}/2 \quad (0 \leq t \leq 2)$$

- (1) 曲線  $C_1, C_2, C_3$  を複素平面上に図示せよ.
- (2) 曲線  $C_1, C_2, C_3$  に囲まれた領域で関数  $f(z) = 1/(z - i)$  は正則である. このとき次式が成り立つことを示せ.

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z - i} = - \int_{C_2} \frac{dz}{z - i} + \oint_{C_3} \frac{dz}{z - i}$$

- (3) 次の積分を求めよ.

(i)  $\int_{C_2} \frac{dz}{z - i}$

(ii)  $\oint_{C_3} \frac{dz}{z - i}$

- (4) (2), (3) の結果を用いて以下の積分を求めよ.

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z - i}$$