

解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

- (1) ド・モアブルの公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が成り立つことを示せ.

- (2) (1) のド・モアブルの公式とオイラーの公式 (
- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
-) を用いて

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

が成り立つことを示せ.

- (3)
- z
- を複素数とするとき,
- $z^3 = -1$
- の根を全て求め, それを複素平面上に図示せよ.

問題 2

次の周回積分を求めよ.

- (1) 積分路
- C
- は 3 点
- $z = 0, z = 1, z = 1 + i$
- を頂点とする三角形を正の向きに一周するものとする.

i) $\oint_C z dz$

- (2) 積分路
- C
- は点
- $z = \alpha$
- を中心とする半径
- a
- の円周を正の向きに 1 周するものとする.

i) $\oint_C (z - \alpha) dz$

ii) $\oint_C \frac{dz}{z - \alpha}$

問題 3

次の関数の極とその位数, その極における留数を求めよ.

$$(1) \frac{z-1}{z^2+2z+2}$$

$$(2) \frac{z}{\sinh z}$$

$$(3) \frac{\cos \pi z}{z^4-16}$$

問題 4

複素積分を利用して以下の積分を求めよ. ただし a, b は実数とする.

$$(1) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(3z-i)}$$

$$(2) \oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^4-1}$$

$$(3) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b \cos \theta} \quad (a > b > 0)$$