

解答上の注意

1. 問題用紙 3 枚, 答案用紙 4 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)$ はスカラー関数, $\mathbf{A}(x, y, z), \mathbf{B}(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

- (1) $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$
- (2) $\nabla (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
- (3) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

問題 2

3次元直交座標系における回転について考える. 回転前の3つの直交座標軸 1, 2, 3 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, 回転後 (すべてプライム'をつけて表す) の直交座標軸 1', 2', 3' 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ で表す. このとき位置ベクトル \mathbf{r} はそれぞれの座標系において,

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3$$

と表される.

- (1) このとき旧座標から新座標への変換は行列を用いて以下の様に見えることを示せ.

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{但し } a_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$$

- (2) 第3軸の周りに角度 θ 右ねじ回転するときの回転行列 $R_3(\theta)$ の表式を求めよ.

問題 3

極座標系 (r, θ, ϕ) について以下の問に答えよ.

- (1) (x, y, z) を (r, θ, ϕ) を用いて表せ.
- (2) スケール因子 h_r, h_θ, h_ϕ を求めよ.
- (3) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるスカラー φ の勾配は

$$(\text{grad } \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_j は u_j 成分であることを示す. これを用いて球座標系における φ の勾配の各成分を表せ.

- (4) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル \mathbf{A} の発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right)$$

と表される. これを用いて球座標系における \mathbf{A} の発散を表わせ.

- (5) 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル \mathbf{A} の回転は

$$(\nabla \times \mathbf{A})_{u_i} = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

と表される. ここで下付き添字 u_i は u_i 成分であることを示す. これを用いて球座標系における \mathbf{A} の回転の各成分を表せ.

問題 4

- (1) 密度 $\rho(x, y, z, t)$ である流体が速度 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ で運動しているとする. 流体のわきだしも吸い込みもないとすると, 以下の方程式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

- (2) 閉曲線 C に沿って発生する電場を \mathbf{E} とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

が成り立つ. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. 磁束密度を \mathbf{B} とすると $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$ と表されることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

を求めよ.