14.1 留数定理を用いた実関数の積分 (2)

実関数 $f(x)$ が x の有理関数で, 分母の次数が分子の次数よりも 2 以上大きいとする このとき以下の積分

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \tag{14.1}$$

は, 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R \to \infty} \oint_C f(z)\, dz$$

と表される. ここで z は複素数で, C は図 14.1 のように実軸上の線分 $-R \leq x \leq R$ と, 原点を中心とする半径 R の上半円 Γ に沿って正の向きに一周する経路である. コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z) \text{ が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \text{Res}\, f(z_k) & f(z) \text{ が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である (Im $z_k > 0$). これを用いて以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx$

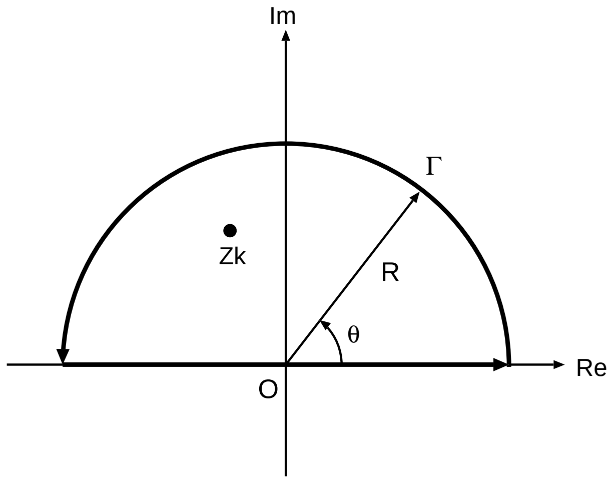

図 14.1:

14.2 留数定理を用いた実関数の積分 (3)

実関数 $f(x)$ は x の有理関数で, 分母の次数が分子の次数より 1 以上大きいとする. このとき以下の積分

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx \quad (a > 0) \tag{14.2}$$

は, 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R \to \infty} \oint_C f(z) e^{iaz}\, dz$$

と表されることを示せ. ここで z は複素数で, C は図 14.1 に示した積分路とする. コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z)e^{iaz}\text{が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,[f(z)e^{iaz}]_{z=z_k} & f(z)e^{iaz}\text{が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である ($\mathrm{Im}\, z_k > 0$). これを用いて以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{a^2 + b^2}\, dx \quad (a, b$ は実定数)

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^4 + a^4}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin bx}{x^4 + a^4}\, dx \quad (a, b$ は正の実定数)