## 1.1 ベクトルと基底

方向と大きさを持つ量を **ベクトル** (vector) と呼ぶ. 以下ではベクトルを太文字のアルファベット $\boldsymbol{a}$ 等として表す. ベクトルは複数の数の組合せとしても表現することができる. ベクトルを構成する個々の数をベクトルの**成分** (component) と呼び, $a_1, a_2, \cdots$ 等と表す. n 個の成分からなる $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ と, 2 つの $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **内積** (inner product) は, それぞれ以下のように定義される.

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

ここで $b_i$ はベクトル $\boldsymbol{b}$ の成分である.

(1) 以下が成り立つことを確認せよ. ただし $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_i = a_i + b_i$ とする.

1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

2) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

3) $\boldsymbol{a} \cdot \alpha \boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

(2) $r$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立であり, $r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}$ が 1 次従属である場合, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_j$ の 1 次結合で表されることを示せ.

(3) 1 次独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ から, 正規直交系 (大きさが 1 で互いに直交するベクトル) を作れ.

(4) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (-2, -1, 2), \boldsymbol{b} = (-4, -2, 4), \boldsymbol{c} = (3, 1, 0)$, およびその一次結合から作られるベクトルからなるベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ の次元 (基底の数) と正規直交基底を求めよ.

## 1.2 座標軸の回転

3 次元直交座標系における回転について考える．回転とは次の 2 つのいずれかの操作を意味する

i) 座標軸は固定し, 原点のまわりに空間内の点を回転させる,

ii) 点は固定し，座標軸を原点の周りに回転させる．

ここでは ii) の座標軸の回転を考えることにする．

回転前の 3 つの直交座標軸 $1, 2, 3$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転後 (すべてプライム $'$ をつけて表す) の直交座標軸 $1', 2', 3'$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ で表す．このとき位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ はそれぞれの座標系において,

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + x'_3\boldsymbol{e}'_3$$

と表される．

(1) このとき旧座標から新座標への変換は行列を用いて以下の様に書けることを示せ. この行列は回転行列と呼ばれる．

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad 但し\ a_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

ここで $\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ はベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ の内積を表す．

(2) 次の各軸の周りに角度 $\theta$ それぞれ右ねじ回転するときの回転行列 $R_3(\theta)$, $R_2(\theta)$，$R_1(\theta)$ の表式をそれぞれ求めよ．

1) 第 3 軸　　2) 第 2 軸　　3) 第 1 軸

(3) 回転行列 $R_3(\theta)$，$R_2(\theta)$，$R_1(\theta)$ は互いに可換か．

## 1.3 ベクトルの内積と外積

方向と大きさを持つ量を **ベクトル** (vector) と呼ぶ. 以下ではベクトルを太文字のアルファベット $\boldsymbol{a}$ 等として表し, 特に注意のない限り右手系の 3 次元ベクトルを考える. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分をそれぞれ $a_i, b_i (i = 1 \sim 3)$ とすると, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積** (inner product, scalar product) と **外積** (outer product, vector product) は, 添字について**アインシュタインの規約**[1] に従うとするとそれぞれ以下のように与えられる.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\varepsilon_{1ij} a_i b_j, \varepsilon_{2ij} a_i b_j, \varepsilon_{3ij} a_i b_j) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_k. \tag{1.2}$$

ここで $\theta$ はベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角, $\boldsymbol{e}_k$ は ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によって張られる平面に垂直なベクトルで, その向きは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へと右まわりに進むねじの方向にとる. $\varepsilon_{ijk}$ は**エディントンのイプシロン**で, 以下のように定義される.

| $i$ | $j$ | $k$ | $\varepsilon_{ijk}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 2 | -1 |
| 3 | 2 | 1 | -1 |
| 2 | 1 | 3 | -1 |
| | | | 0 |

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ となること示せ.

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ となることを示せ (スカラー 3 重積).

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ となることを示せ (ベクトル 3 重積).

(4) スカラー 3 重積の幾何学的な意味を説明せよ.

[1] 同じ添字が 2 つ以上現れた場合にはその添字について和をとる, というもの.