4.1 スカラーの勾配

座標 x, y, z の関数 $f = f(x, y, z)$ が与えられた場合, 点 (x, y, z) における f の**勾配** (gradient) は以下のように定義される.

$$\text{grad } f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{4.1}$$

ここで $\boldsymbol{e}_i$ は i 方向の単位ベクトルである. grad はグラジュエント, もしくはグラッドと発音する. (4.1) はハミルトンの演算子

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\text{grad } f = \nabla f$$

と表される.

(1) 固定点 P から一定の微小距離 dr だけ離れた点 Q がある. 点 P から Q へ移動した際の関数 f の変化が最大となるのは, ベクトル PQ が点 P における ∇f に平行な場合であることを示せ (ヒント: ベクトル PQ を $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$ としてみよ).

(2) ∇f は $f =$ 一定 の面 (これを等位面と呼ぶ) に垂直であることを示せ.

(3) g を f とは異なるスカラー関数とする場合, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし α, β はスカラーとする.

(i) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g$

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(iii) $\nabla\left(\dfrac{g}{f}\right) = \dfrac{f\nabla g - g\nabla f}{f^2}$

(iv) $\nabla f(g) = \dfrac{\partial f}{\partial g}\nabla g$

4.2 ベクトルの発散

各成分が座標の関数となっているベクトル

$$\boldsymbol{A} = a_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + a_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + a_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

を考える (このとき $\boldsymbol{A}$ をベクトル場と呼ぶ). $\boldsymbol{A}$ の**発散** (divergence, ダイバージェンス) は以下のように定義される.

$$\text{div } \boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{4.2}$$

(1) $\varphi = \varphi(x,y,z)$ をスカラー関数とすると,

$$\text{div} \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = (\text{grad } \varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi \text{div} \cdot \boldsymbol{A}$$

となることを示せ.

(2) スカラー関数 φ に対し,

$$\text{div } (\text{grad } \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

となることを示せ.

div (grad φ) は $\nabla \cdot (\nabla \varphi)$, $\nabla^2 \varphi$ 等とも表す. とくに ∇^2 を記号 Δ で表し, これをラプラス演算子と呼ぶ.

4.3 ベクトルの回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し, その**回転** (rotation, ローテーション, ロート) は以下のように定義される.

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{4.3}$$

行列式の形で書けば,

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

と表される.

(1) rot$\boldsymbol{A}$ の第 i 成分をエディィントンのイプシロン ε_{ijk} を用いて表せ.

(2) スカラー関数 φ に対し rot (grad φ) $= 0$ となることを示せ.

(3) div (rot $\boldsymbol{A}$) $= 0$ となることを示せ.

(4) rot $(\varphi\boldsymbol{A})$ $=$ (grad φ) $\times\ \boldsymbol{A} + \varphi$rot $\boldsymbol{A}$ となることを示せ.

4.4 発散・回転の物理的解釈

(1) 3 次元空間内の**定常な流れ**を考える. このとき空間内の各点の速度場は $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ で与えられる. 流れ場中に空間内のある一点 P(x, y, z) を頂点にもち, 角辺が x, y, z 軸に平行でその長さが (dx, dy, dz) である微小直方体を置く. この直方体から単位時間に流出する流体の総体積は, 近似的に

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})_{\mathrm{P}} \times dxdydz$$

と表されることを示せ. ここで $(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})_{\mathrm{P}}$ は点 P における $\boldsymbol{v}$ の発散を表す.

(2) 原点を通る固定軸の周りに一定の角速度 Ω で剛体が回転しているとする. 剛体の任意の点における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする. $\boldsymbol{r}$ における速度を $\boldsymbol{v}$ とするとき, rot $\boldsymbol{v}$ を計算せよ.

4.5 ∇ を含む演算

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x, y, z)$, $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$

(2) $\nabla\cdot(\nabla\varphi \times \nabla\psi) = 0$

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla\times\boldsymbol{B})$

(4) $\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(5) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A}$

(6) $\nabla\times(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

(7) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$