8.1 複素数の指数関数

a, t は実数とする. このとき指数関数 e^{at} は

$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots$$

と無限級数を用いて表される. ただし $0! = 1$ とする. さらに e^{at} は次の微分方程式の初期値問題,

$$\frac{df(t)}{dt} = af(t), \quad f(0) = 1,$$

の解である.

以下では a を複素数に拡張可能であるとする.

(1) オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{8.1}$$

が成り立つことを示せ. ここで θ は実数である (ヒント: $\cos\theta, \sin\theta$ のテーラー展開を利用する).

(2) 任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ となることを示せ (ヒント: e^{at} が上記の微分方程式の解であることを利用する).

8.2 オイラーの公式の利用

オイラーの公式 (8.1), ド・モアブルの公式を用いて以下の公式が成り立つことを示せ.

(1) $\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2$

(2) $\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \pm \sin\theta_2 \cos\theta_1$

(3) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(4) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

8.3 複素数の関数

w, z を複素数とする. $w = z^2 + \alpha z$ (α は定数で $\alpha \neq 0$) と表されるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 $z = \alpha$ を通り, 虚軸に平行な直前 Γ_1 に沿って z が動くとき, w 平面上で w の描く軌跡を図示せよ.

(2) 点 $z = \alpha$ を通り, 実軸に平行な直前 Γ_2 に沿って z が動くとき, w 平面上で w の描く軌跡を図示せよ.

(3) 点 z が z 平面上で直線 $\Gamma_3; z = (1+i)t$ $(-\infty < t < \infty,\ t$ は実数) に沿って z が動くとき, w 平面上で w の描く軌跡を図示せよ.

8.4 複素関数の極限と連続性

領域 D で定義された複素関数 $w = f(z)$ を考える. z が D 内を移動してある点 z_0 に近付くとき, w が w 平面内の点 w_0 に近付く場合, $f(z)$ は $z = z_0$ で**極限値** w_0 **を持つ**という. 数式では

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{8.2}$$

と表す. このとき z_0 **にどの方向から近付いても** w **は** w_0 **に近付く** (すなわち偏角によらない) ことが必要である.

複素関数 $w = f(z)$ が次の 3 つの条件 [1] $z = z_0$ で $f(z_0)$ が存在する, [2] $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ が存在する, [3] $w_0 = f(z_0)$ が成り立つ, を同時に満たすとき, $f(z)$ は $z = z_0$ で**連続**であるという

(1) 次の関数 $f(z)$ の極限値を求めよ. ただし α は定数とする.

(i) $f(z) = (z^3 - 3\alpha^3) + 3z - \alpha \quad (z \to \alpha)$

(ii) $f(z) = \dfrac{z^3 - i\alpha}{z + \alpha} \quad (z \to i)$

(iii) $f(z) = \overline{z} \quad (z \to 0)$

(iv) $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}} \quad (z \to 0)$

(2) 次の関数 $f(z)$ の $z = 0$ における連続性を調べよ.

(i) $f(x) = \begin{cases} (z + \overline{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} (z + \overline{z})^2/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$