## 9.1 複素関数の微分

$h$ を偏角一定の複素数とする. このとき極限値

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{9.1}$$

が $h$ の取り方によらず一意に定まる時，$f(z)$ は $z=z_0$ で**微分可能**と言う．その極限値を $f(z)$ の $z=z_0$ における微分係数と言い，$f'(z_0)$ や $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ 等と記す．領域 $D$ の各点において $f(z)$ が微分可能な時，$f(z)$ は $D$ 上で**正則**であるという.

(1) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x$ として式 (9.1) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(2) $f(z)=z^2$ とする. $h=i\Delta y$ として式 (9.1) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(3) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x+i\Delta y$, $\Delta y=k\Delta x$ として, 式 (9.1) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(4) $f(z)=z^n$ の場合, 式 (9.1) の極限は $h$ の偏角の値によらず $nz^{n-1}$ に収束することを示せ.

## 9.2 等角写像

関数 $f(z)=z^2$ による写像 $w=f(z)$ の性質について考える.

(1) $z$ 平面上の 2 つの直線

(a) $z=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+i\dfrac{t}{2}$

(b) $z=1+\dfrac{t}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

(ただし $t$ は実数) の交点 $z_0$ と $z_0$ における直線の交角 $\theta$ を求めよ.

(2) (1) で与えられた 2 つの直線の写像 $f(z)$ による $w$ 平面上の像を求め, それを図示せよ.

(3) (2) で求めた $w$ 平面上での像の交点と, 交点における像の接線のなす角 $\theta'$ を求めよ.

## 9.3 コーシー・リーマンの定理

(1) 領域 $D$ で定義された複素関数 $f(z)$ の実部および虚部を $u(x,y), v(x,y)$ とする ($z = x + iy, z \in D$). $u, v$ が連続で，かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.2}$$

を満たすならば，関数 $f(z)$ は領域 $D$ 上で正則であることを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の必要条件の証明).

(2) 実関数 $u(x,y), v(x,y)$ が式 (9.2) を満たすとき, 複素関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ($z = x + iy$) は正則であることを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の十分条件の証明).

コーシー・リーマンの微分方程式 (9.2) を変形すると, $u(x,y), v(x,y)$ の満たす式として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

が得られる. これらは 2 次元のラプラス方程式である. ラプラス方程式の解は調和関数と呼ばれる. コーシー・リーマンの微分方程式 (9.2) の関係を満たすような調和関数の組を, **違いに共役な調和関数**という.

(3) $u(x,y) = e^x \sin y$ は調和関数であることを確かめよ.

(4) 上記の $u$ に共役な調和関数 $v(x,y)$ を求めよ.

## 9.4 複素関数の正則性

以下の複素数 $z = x + iy$ ($x, y$ は実数) の関数 $f(z)$ がコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

(1) $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$

(2) $f(z) = e^{-y}\,(\cos x + i\ \sin x)$

(3) $f(z) = z - \bar{z}$

(4) $f(z) = z + 1/z$